



Princípios de Comunicações

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br



II. Sinais e sistemas, princípios de transmissão e filtragem

- A. Conceitos básicos
- B. Análise de Fourier
- C. Transformada de Fourier, transmissão e filtragem
- D. Potência e Energia
- E. Transformada de Hilbert
- F. Sinais passa-baixa e passa-faixa

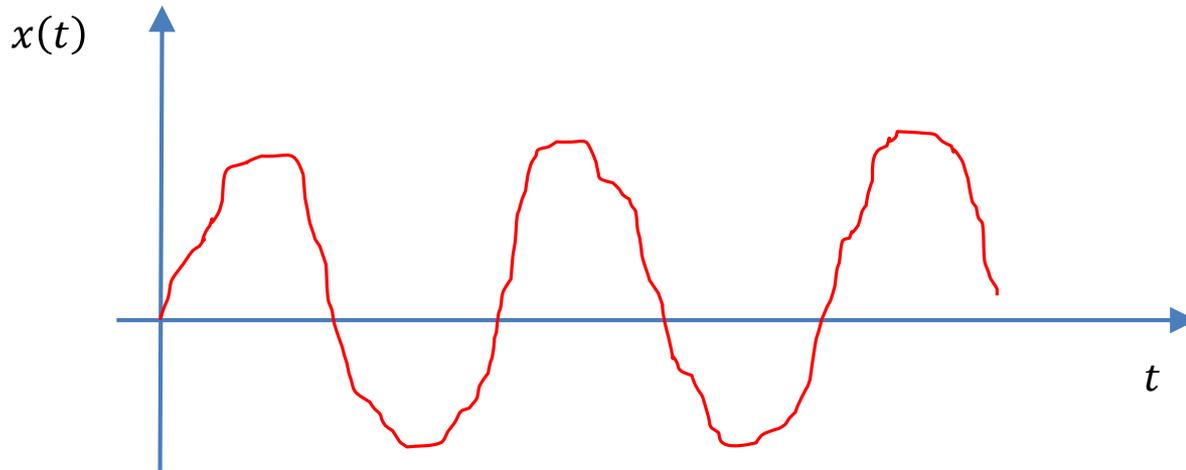


Introdução

- Neste capítulo, os conceitos de sinais e sistemas lineares são revisados e uma atenção especial é dedicada à transformada de Fourier.
- Em comunicações, os sinais são usados para transmitir informação através de canais de comunicações.
- Os canais de comunicações podem ser modelados como sistemas lineares e provocar distorções de amplitude e fase nos sinais.
- Além disso, os conceitos de potência e energia de sinais são revistos e discutidos.
- Finalmente, são caracterizados sinais do tipo passa-baixa e passa-faixa através de manipulações algébricas.

A. Conceitos básicos

- Na nossa exposição, são considerados sinais que são funções no tempo e que podem ser matematicamente representados por $x(t)$.



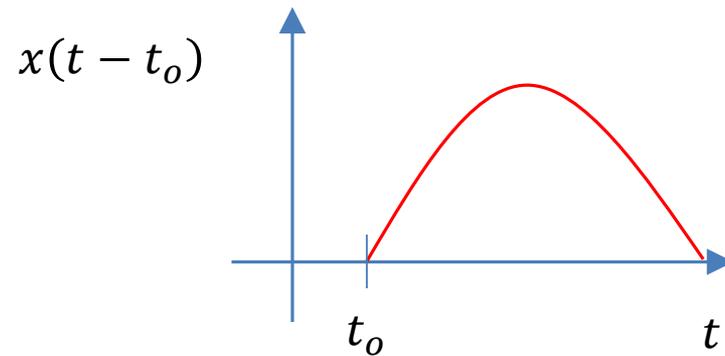
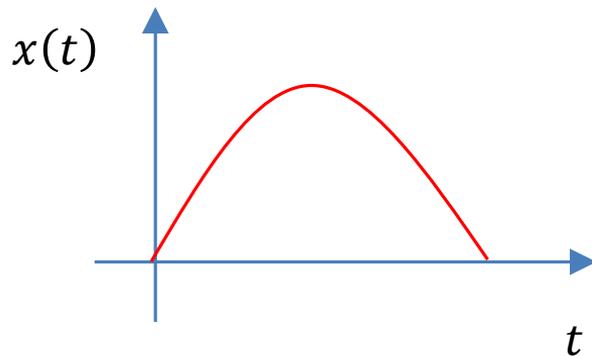
- Operações básicas em sinais envolvem deslocamento no tempo, reversão no tempo e escalonamento.

Operações básicas

i) Deslocamento no tempo

$$x(t) \rightarrow x(t - t_0),$$

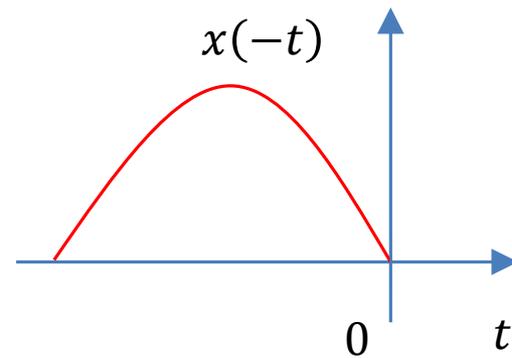
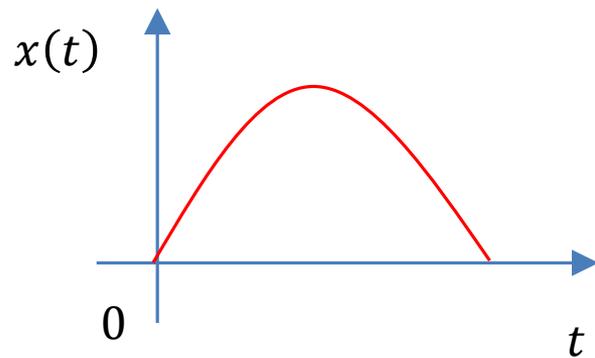
em que t_0 ($t_0 > 0$) pode ser um retardo ou um avanço ($t_0 < 0$).





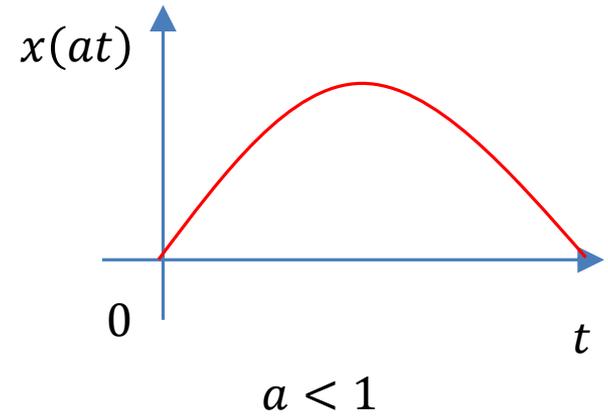
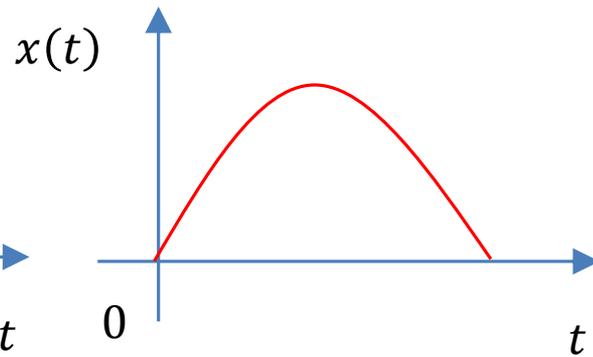
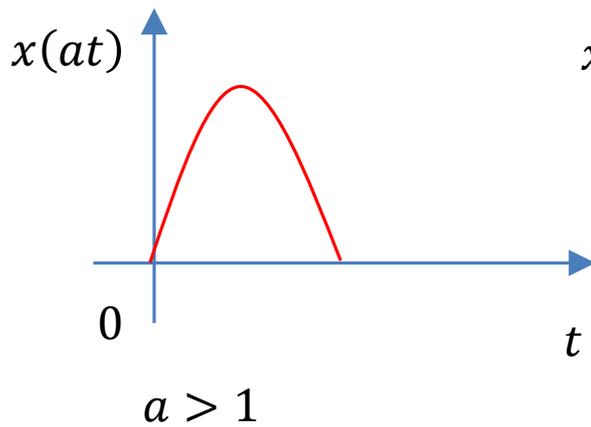
ii) Reversão no tempo

$$x(t) \rightarrow x(-t)$$



iii) Escalonamento no tempo

$$x(t) \rightarrow x(at), \quad a > 0$$





Classificação de sinais

- Sinal contínuo no tempo vs sinal discreto no tempo:
 - Sinal contínuo: $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$
 - Sinal discreto: $x[n]$, $n \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Amostragem de um sinal contínuo no tempo $x(t)$ em um sinal discreto no tempo:

$$x[n] = x(t) \Big|_{t = nT_0} = x(nT_0),$$

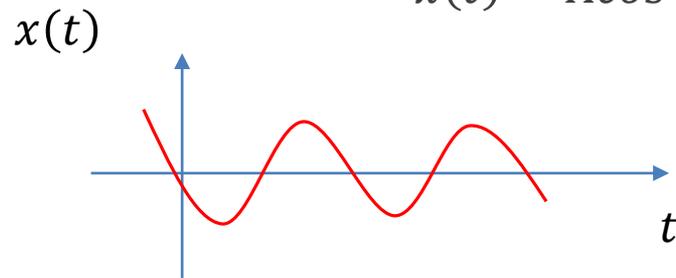
em que T_0 é o período de amostragem.



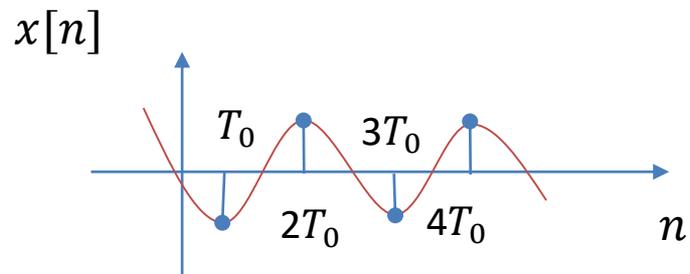
Exemplo 1

Considere o sinal descrito por

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$



Mostre o sinal amostrado a uma taxa T_0





- Sinais podem ser funções reais ou complexas ao longo do tempo.
- Em comunicações, sinais complexos são muito usados para modelar sinais que carregam informação na fase e/ou na amplitude.
- Um sinal complexo pode ser descrito por

$$\begin{aligned}x(t) &= x_R(t) + jx_I(t) \\ &= Ae^{j\theta},\end{aligned}$$

em que $A = \sqrt{x_R^2(t) + x_I^2(t)}$ é a amplitude e $\theta = \arg\{x(t)\} = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{x(t)\}}{\text{Re}\{x(t)\}}$ é a fase.



Exemplo 2

Escreva o sinal $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$ em função das partes imaginária e real e dos componentes de magnitude e fase.

$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)} \\&= A \cos(2\pi f_0 t + \theta) + jA \sin(2\pi f_0 t + \theta) \\&= x_R(t) + jx_I(t) \\&= \sqrt{x_R^2(t) + x_I^2(t)} e^{j \arg\{x(t)\}}\end{aligned}$$



- Sinais podem também ser classificados como determinísticos ou aleatórios.
- Em sinais determinísticos, os valores de $x(t)$ são números reais ou complexos.
- Em sinais aleatórios, temos um processo estocástico.
- Nesse último caso, a cada instante de tempo $x(t)$ (ou $x[n]$) é uma variável aleatória descrita por uma função densidade de probabilidade.



- Além disso, os sinais podem ser classificados como sinais periódicos ou não periódicos.
- Um sinal periódico $x(t)$ satisfaz à propriedade

$$x(t + T_0) = x(t), \quad \forall t,$$

em que T_0 é o período do sinal que assume valores reais e positivos.

- Para sinais discretos periódicos, tem-se

$$x[n + N_0] = x[n], \quad \forall n,$$

em que N_0 é um inteiro positivo.

- Se o sinal não satisfaz as condições acima ele é não periódico.



Exemplo 3

Considere o sinal $x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \theta)$ e verifique se ele é periódico.

Para o sinal $x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \theta)$ ser periódico, é preciso que

$$2\pi f_0(n + N_0) + \theta = 2\pi f_0 n + \theta + 2\pi k, \quad k \text{ inteiro}$$

o que resulta em

$$2\pi f_0 N_0 = 2\pi k \quad \text{e} \quad f_0 = \frac{k}{N_0}$$

Logo, o sinal é periódico apenas para valores racionais de f_0 .

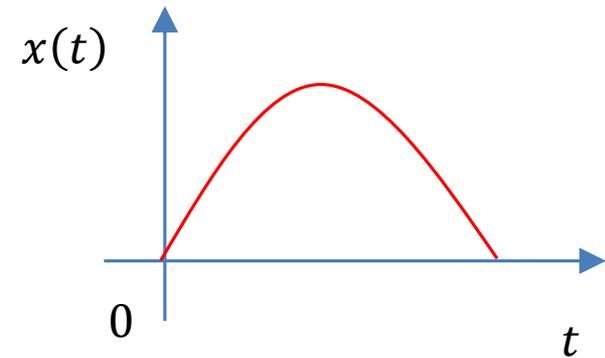


- Sinais causais são também importantes pois o conceito de causalidade é fundamental para sistemas realizáveis.
- Um sinal é causal se

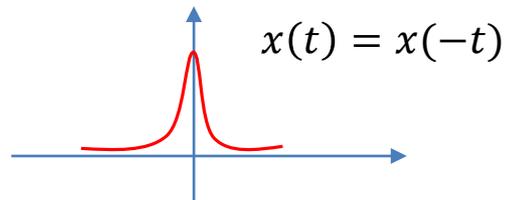
$$x(t) = 0, \quad \text{for } t < 0$$

ou de forma equivalente,

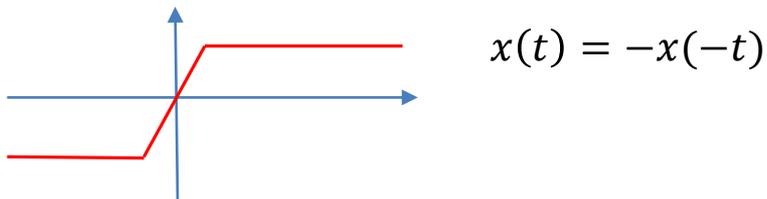
$$x[n] = 0, \quad \text{for } n < 0$$



- Sinais também podem ser classificados como sinais pares e ímpares.
- Um sinal $x(t)$ é par se ele tem simetria com relação ao eixo vertical.



- Um sinal $x(t)$ é ímpar se ele é antissimétrico com relação ao eixo vertical.



- Em geral, qualquer sinal pode ser escrito como a soma dos componentes par e ímpar

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t),$$

em que $x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$ e $x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$



Exemplo 4

Decomponha o sinal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ em seus componentes par e ímpar.

Para $\theta = 0$ ou $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, tem-se

$$x(t) = \frac{A}{2} \cos(\theta) \cos(2\pi f_0 t) - \frac{A}{2} \sin(\theta) \sin(2\pi f_0 t)$$

Como $\cos(2\pi f_0 t)$ é par e $\sin(2\pi f_0 t)$ é ímpar, obtém-se

$$x_e(t) = \frac{A}{2} \cos(\theta) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$x_o(t) = \frac{A}{2} \sin(\theta) \sin(2\pi f_0 t)$$



- Para sinais complexos, uma outra forma de simetria chamada de simetria Hermitiana é comumente utilizada.
- Um sinal complexo $x(t)$ (ou $x[n]$) é chamado de Hermitiano se a parte real é par e a parte imaginária é ímpar.
- Por exemplo, o sinal $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ é Hermitiano.



Sinais com energia ou potência

- Para qualquer sinal $x(t)$, a energia do sinal é dada por

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Para um sinal $x(t)$, a potência é descrita por

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt,$$

- Para sinais reais substitui-se $|x(t)|^2$ por $x^2(t)$.
- Diz-se que um sinal é do tipo energia se e somente se ε_x é finito, enquanto um sinal do tipo potência satisfaz $0 < P_x < \infty$.



Exemplo 5

Calcule a energia e a potência do sinal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$$\varepsilon_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt = \infty$$

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A^2}{2} [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)] dt \end{aligned}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{A^2 T}{2T} + \left(\frac{A^2}{8\pi f_0 T} \operatorname{sen}(4\pi f_0 t + 2\theta) \right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} < \infty$$

Logo, o sinal é do tipo potência com $P_x = \frac{A^2}{2}$. Como ele é periódico a energia é infinita.



Sinais importantes e propriedades

i) Sinais senoidais

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta),$$

em que A , f_0 e θ são a amplitude, a frequência e a fase, respectivamente.

ii) Sinais exponenciais complexos

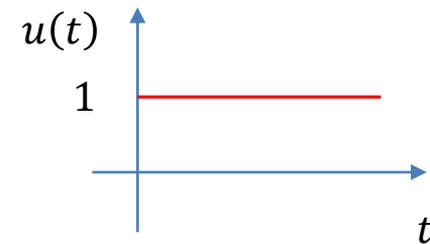
$$x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \theta)},$$

em que A , f_0 e θ são a amplitude, a frequência e a fase, respectivamente.



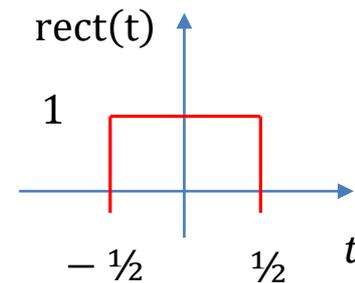
iii) O sinal degrau unitário

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



iv) O pulso retangular

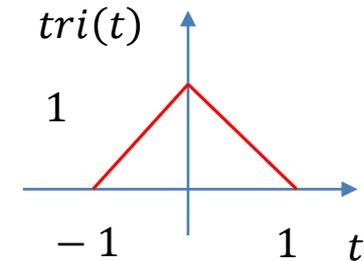
$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$





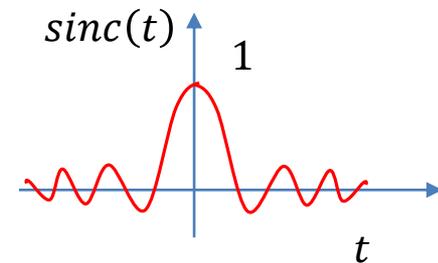
v) O sinal triangular

$$tri(t) = \begin{cases} t + 1, & -1 \leq t \leq 0 \\ -t + 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



vi) O sinal sinc

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

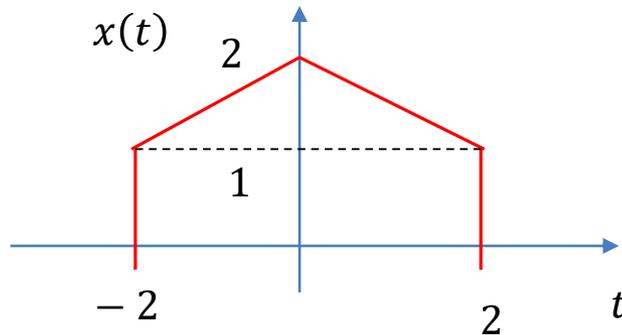




Exemplo 6

Escreva e esboce um sinal que seja a combinação de $rect\left(\frac{t}{4}\right)$ e $tri\left(\frac{t}{2}\right)$

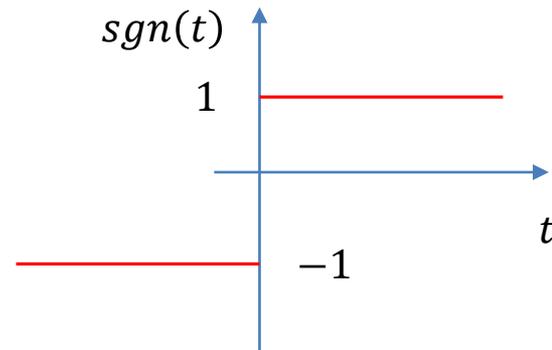
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) + tri\left(\frac{t}{2}\right)$$





vii) O sinal sgn

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

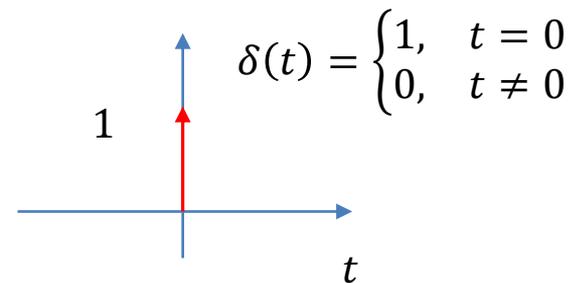


vii) O sinal impulso

Matematicamente, o impulso $\delta(t)$ não é uma função nem um sinal mas uma distribuição dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$





Exemplo 7

Calcule

a) $y(t) = x(t) * \delta(t - t_0)$

$$y(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

b) $z(t) = \cos(t) \cdot \delta(t - t_0)$ para t_0 genérico e para $t_0 = 0$

$$z(t) = \cos(t) \cdot \delta(t - t_0) = \cos(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Para $t_0 = 0$ tem-se

$$z(t) = \cos(0) \cdot \delta(t) = \delta(t)$$

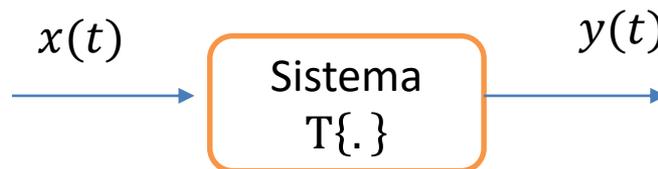


Classificação de sistemas

- Em comunicações, um sistema é uma entidade que realiza operações matemáticas em sinais, resultando em sinais modificados na saída.
- Matematicamente, escreve-se uma operação de sistema como

$$y(t) = T\{x(t)\},$$

em que $x(t)$ é o sinal de entrada, $y(t)$ é o sinal de saída e $T\{.\}$ é a operação matemática realizada pelo sistema ilustrada por





i) Sistemas discretos e contínuos no tempo

$$\begin{aligned} & y[n] = T\{x[n]\} \\ \text{and} & \quad y(t) = T\{x(t)\} \end{aligned}$$

ii) Sistemas lineares e não lineares

Um sistema $T\{\cdot\}$ é linear se e somente se, para quaisquer sinais de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e constantes α e β , tem-se

$$T\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha T\{x_1(t)\} + \beta T\{x_2(t)\},$$

que envolve as propriedades aditiva e de superposição.



Exemplo 8

Verifique se os seguintes sistemas são lineares:

a) $y(t) = ax^2(t)$

b) $y(t) = x(t - t_0)$



Solução:

a) Usando $y(t) = ax^2(t)$ e $T\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha T\{x_1(t)\} + \beta T\{x_2(t)\}$ tem-se

$$a(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^2 \neq a\alpha(x_1(t))^2 + a\beta(x_2(t))^2$$

Logo, o sistema é não-linear



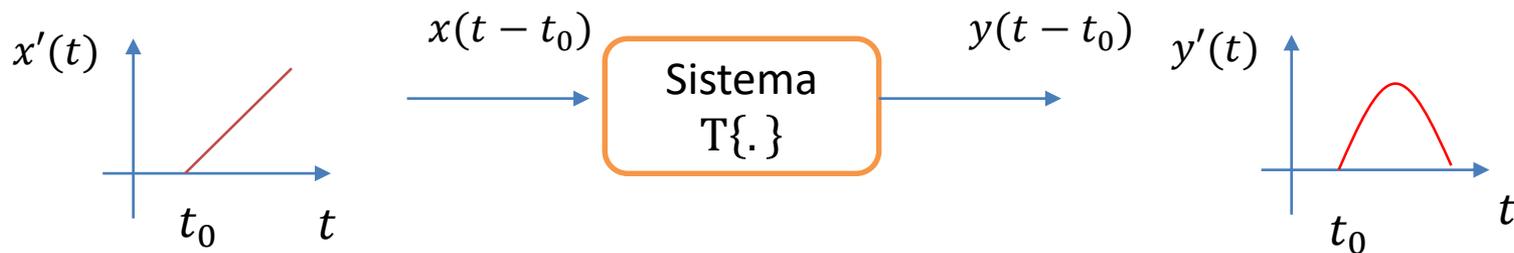
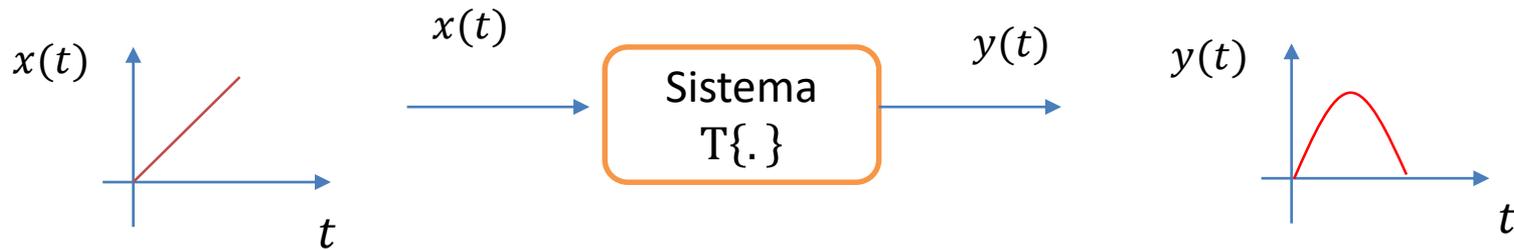
b) Usando $y(t) = x(t - t_0) e^{-T\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\}} = \alpha T\{x_1(t)\} + \beta T\{x_2(t)\}$ tem-se

$$\alpha x_1(t - t_0) + \beta x_2(t - t_0) = \alpha x_1(t - t_0) + \beta x_2(t - t_0)$$

Logo, o sistema é linear

iii) Sistemas invariantes e variantes no tempo

Um sistema é invariante no tempo se a relação de entrada e saída não varia com o tempo.





Sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI) são importantes pois estes são completamente especificados pelas suas respostas ao impulso.

Logo, a resposta de sistemas LTI a sinais pode ser calculada pela convolução do sinal de entrada e da resposta ao impulso do sistema:

$$\begin{aligned}y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau\end{aligned}$$



iv) Sistemas causais e não causais

Um sistema é causal se a sua saída a qualquer instante de tempo t_0 depende do sinal de entrada antes de t_0 :

$$y(t_0) = T\{x(t)\}, \quad t \leq t_0$$

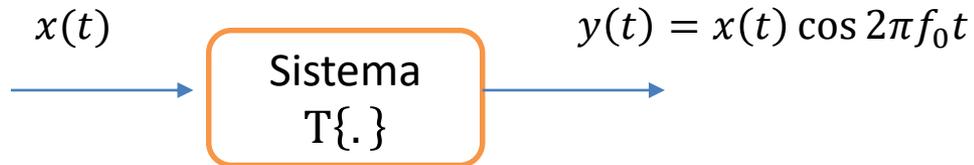
Uma condição necessária e suficiente para um sistema LTI ser causal é que a sua resposta ao impulso $h(t)$ seja causal:

$$h(t) = 0, \quad \text{for } t < 0$$



Exemplo 9

Verifique se o sistema $y(t) = x(t) \cos 2\pi f_0 t$ é variante no tempo.



Como $x(t - t_0)$ produz $y(t) = x(t - t_0) \cos 2\pi f_0 t$, o que é diferente de

$$y(t - t_0) = x(t - t_0) \cos 2\pi f_0 (t - t_0),$$

o sistema é variante no tempo.



Análise de sistemas LTI

- Muitos sistemas de comunicações podem ser modelados como sistemas LTI, que são completamente especificados por suas respostas ao impulso.
- Como os canais de comunicações são modelados como sistemas LTI então o conhecimento destes pode descrever completamente os sistemas.
- A resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema é a resposta do sistema ao impulso unitário dada por

$$h(t) = T\{\delta(t)\},$$

em que a resposta do sistema no instante de tempo τ , $\delta(t - \tau)$, para sistemas LTI é descrita por

$$h(t, \tau) = h(t - \tau).$$



- A saída $y(t)$ de um sistema LTI a uma entrada $x(t)$ pode ser expressa em termos de $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$:

$$\begin{aligned}y(t) &= T\{x(t)\} = T\{x(t) * \delta(t)\} \\&= T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau\right\} \\&= \int_{-\infty}^{\infty} T\{\delta(t - \tau)\} x(\tau) d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau = h(t) * x(t),\end{aligned}$$

que é expressa como a convolução de $h(t)$ e $x(t)$.



Exemplo 10

Considere um sistema LTI e um sinal de entrada dado por

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)}.$$

Calcule a resposta do sistema.



Solução:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\theta)}d\tau \\&= Ae^{j2\pi f_0 t} e^{j\theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau}_{H(f_0)} \\&= Ae^{j2\pi f_0 t} e^{j\theta} H(f_0) \\&= Ae^{j2\pi f_0 t} e^{j\theta} |H(f_0)|e^{j \arg \{H(f_0)\}},\end{aligned}$$

o que mostra que a resposta de um sistema LTI a uma exponencial complexa com frequência f_0 é uma exponencial complexa com a mesma frequência.

Isso mostra que exponenciais complexas são autofunções de sistemas LTI.



B. Análise de Fourier

- Muitos blocos de construção em sistemas de comunicações podem ser modelados por sistemas LTI.
- Nesse caso, é comum o uso da integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- Uma abordagem alternativa consiste no uso de autofunções de sistemas LTI, que resulta no uso de análise de Fourier.
- Em particular, emprega-se a série de Fourier para sinais periódicos e a transformada de Fourier para sinais não periódicos.



Série de Fourier

○ Considere um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 e suponha que as seguintes condições de Dirichlet são satisfeitas:

i) $x(t)$ é absolutamente integrável no seu período

$$\int_0^{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

ii) O número de máximos e mínimos de $x(t)$ em cada período é finito.

iii) O número de descontinuidades de $x(t)$ em cada período é finito.



- Então, $x(t)$ pode ser expandido em termos de exponenciais complexas $\left\{ e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t} \right\}_{-\infty}^{\infty}$ da seguinte forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t},$$

em que

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-\frac{j2\pi n}{T_0}t} dt \text{ são os coeficientes de Fourier.}$$

- Para um α arbitrário, que pode ser escolhido como $\alpha = 0$ ou $\alpha = T_0$, $f_0 = \frac{1}{T_0}$ é a frequência fundamental de $x(t)$ e T_0 é o período fundamental.

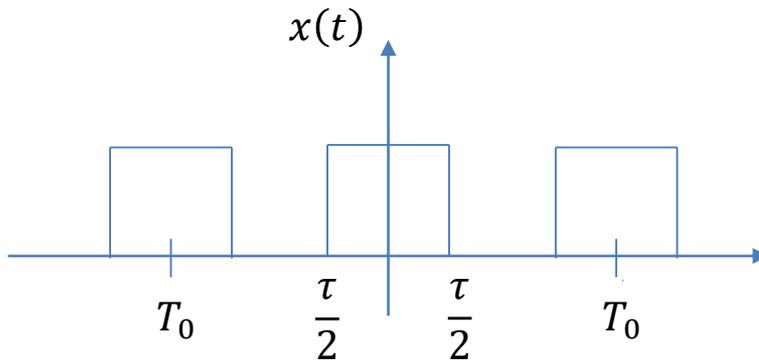


Exemplo 11

Determine a expansão em série de Fourier para

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{t-nT_0}{\tau} \right),$$

em que τ é uma constante que corresponde a largura do pulso



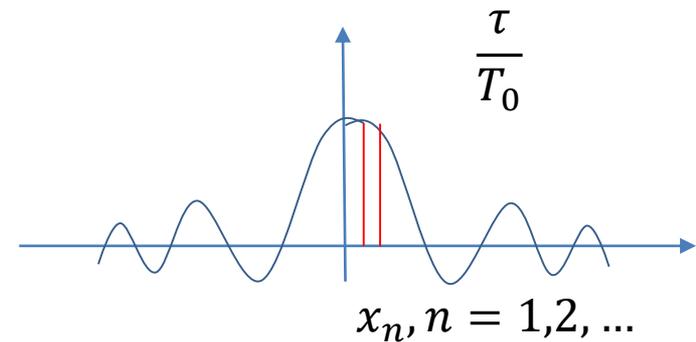


Solução:

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn2\pi t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1 e^{-jn2\pi t} dt \\&= \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{-jn2\pi} \left[e^{-\frac{jn\pi\tau}{T_0}} - e^{\frac{jn\pi\tau}{T_0}} \right], n \neq 0 \\&= \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right), n \neq 0\end{aligned}$$

Logo, tem-se

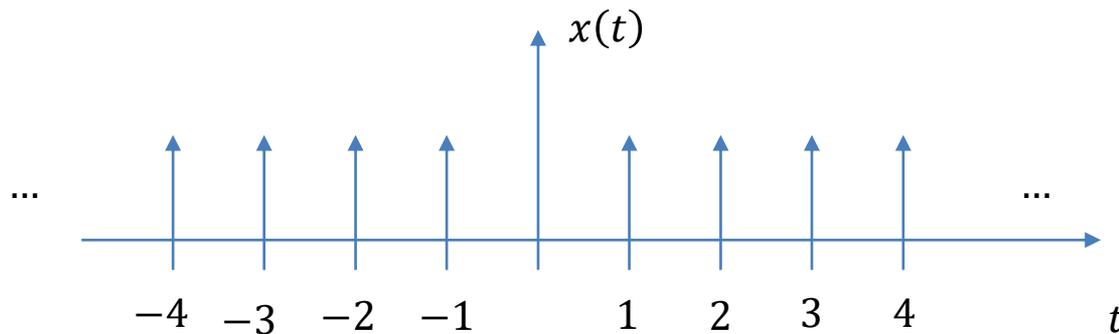
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) e^{\frac{jn2\pi t}{T_0}}$$



Exemplo 12

Determine a representação em série de Fourier de um trem de impulsos descrito por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$





Solução:

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-\frac{jn2\pi t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-\frac{jn2\pi t}{T_0}} dt \\ &= \frac{1}{T_0}\end{aligned}$$

Com esses coeficientes, tem-se

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{jn2\pi t}{T_0}}$$



Resposta de sistemas LTI a sinais periódicos

- A resposta de um sistema LTI a um sinal exponencial complexo é um sinal exponencial complexo com a mesma frequência e uma mudança na amplitude e na fase.
- A resposta em frequência da resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema LTI é dada por

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

- Supõe-se que o sinal de entrada $x(t)$ a um sistema LTI é periódico com período T_0 e representação descrita por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t}$$



- Logo, a resposta do sistema é dada por

$$\begin{aligned}y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} &= \mathcal{T}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t}\right\} \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \mathcal{T}\left\{e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t} \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t},\end{aligned}$$

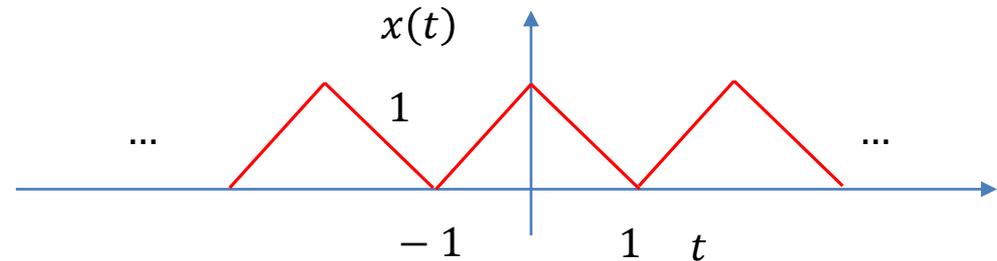
em que $y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$, $|y_n| = |x_n| \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|$ e $\arg\{y_n\} = \arg\{x_n\} + \arg\left\{H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right\}$

- Nota-se que apenas os componentes de frequências na entrada são encontrados na saída já que o sistema LTI não introduz novas frequências.

Exemplo 13

Considere um trem de pulsos triangulares dados por

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} t + 1, & -1 \leq t \leq 0 \\ -t + 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



em que $T_0 = 2$

- Determine os coeficientes da série de Fourier de $x(t)$
- Supondo-se que o sinal é aplicado a um sistema LTI com resposta ao impulso $h(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ calcule o sinal na saída.



$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn2\pi t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \text{tri}(t) e^{-jn2\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{tri}(t) e^{-jn\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (t+1) e^{-jn\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) e^{-jn\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{n}{2} \right) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y_n &= x_n H \left(\frac{n}{T_0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{n}{2} \right) H \left(\frac{n}{2} \right) \end{aligned}$$



Relação de Parseval

- A relação de Parseval estabelece que a potência de um sinal periódico é a soma da potência dos componentes da série de Fourier do sinal.
- Considere a representação em série de Fourier de um sinal periódico $x(t)$ descrita por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\frac{j2\pi n t}{T_0}}$$

- Calculando-se $|x(t)|^2$, obtém-se

$$|x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n^* x_m e^{\frac{j2\pi(n-m)t}{T_0}}$$



- Integrando-se ambos os lados, obtém-se

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n^* x_m \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} e^{\frac{j2\pi(n-m)t}{T_0}} dt$$
$$= T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

em que

$$T_0 \delta_{mn} = \begin{cases} T_0, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

- De fato, a relação de Parseval mostra que a potência do sinal periódico é igual a potência da soma das potências dos harmônicos.



C. Transformada de Fourier

- Nesta seção, considera-se a representação em série de Fourier para sinais não periódicos usando-se exponenciais complexas.
- O espectro resultante desta representação é contínuo e consiste na transformada de Fourier.
- Supõe-se que o sinal $x(t)$ satisfaz as condições de Dirichlet:
 - i) $x(t)$ é absolutamente integrável no seu período

$$\int_0^{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

- ii) O número de máximos e mínimos de $x(t)$ em cada período é finito.
- iii) O número de descontinuidades de $x(t)$ em cada período é finito.



- A transformada de Fourier de $x(t)$ é então definida por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

- A transformada inversa de Fourier é descrita por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df,$$

em que $X(f)$ é uma função complexa, sua magnitude $|X(f)|$ e fase $\arg\{X(f)\}$ representam a amplitude e fase dos componentes de frequência de $x(t)$.



- A transformada de Fourier $X(f)$ do sinal $x(t)$ emprega a notação

$$X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$$

- A transformada inversa de Fourier usa a notação

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(f)\}$$

- Quando a variável da transformada de Fourier é $\omega = 2\pi f$ então tem-se

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

e

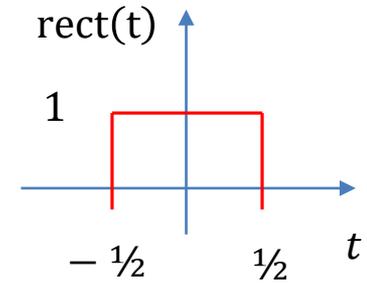
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$



Exemplo 14

Calcule a transformada de Fourier de

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



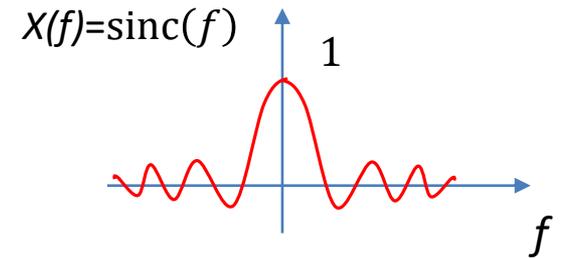


Solução:

$$X(f) = \mathfrak{T}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= -\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j2\pi ft} - e^{-j2\pi ft}) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \text{sinc}(f)$$





Exemplo 15

Calcule a transformada de Fourier de $x(t) = \delta(t)$ e a transformada inversa de Fourier de $X(f) = \delta(f)$.



Solução:

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = \delta(t)|_{t=0} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f)e^{j2\pi ft} df = 1 \end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$1 \stackrel{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} \delta(f) \text{ e } \delta(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} 1$$



Propriedades

i) Linearidade

$$\mathfrak{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$$

ii) Dualidade

$$\text{Se } X(f) = \mathfrak{T}\{x(t)\}$$

$$\text{então } x(f) = \mathfrak{T}\{X(-t)\} \text{ e } x(-f) = \mathfrak{T}\{X(t)\}$$



Exemplo 15

Calcule a transformada de Fourier de $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ usando a propriedade da linearidade.



Solução:

Pode-se escrever $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ como

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

A transformada de Fourier é dada por

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathfrak{F}\{u(t)\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right\} = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \end{aligned}$$



iii) Deslocamento no tempo

$$\mathfrak{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt$$

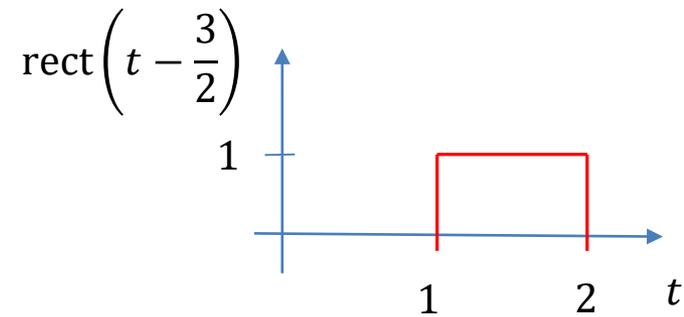
Fazendo-se $u = t - t_0$ tem-se

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi ft_0} e^{-j2\pi fu} du \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi fu} du \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \mathfrak{F}\{x(t)\} \\ &= e^{-j2\pi ft_0} X(f)\end{aligned}$$



Exemplo 16

Determine a transformada de Fourier de $x(t) = \text{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right)$, em que $t_0 = \frac{3}{2}$





Solução:

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = e^{-j2\pi f \frac{3}{2}} \mathfrak{F}\{\text{rect}(t)\} \\ &= e^{-j2\pi f \frac{3}{2}} \text{sinc}(f) \end{aligned}$$



iv) Escalonamento

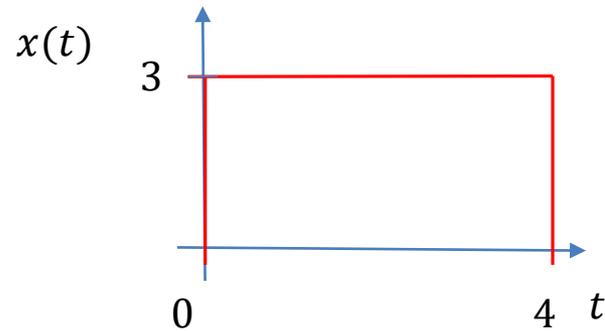
Para qualquer número real $a \neq 0$, tem-se

$$\mathfrak{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$



Exemplo 17

Determine a transformada de Fourier de $x(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$





Solução:

O sinal pode ser escrito como $x(t) = 3\text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$

A transformada de Fourier de $x(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathfrak{F}\left\{3\text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)\right\} \\ &= 3\mathfrak{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)\right\} = 3e^{-j2\pi f \cdot 2} \mathfrak{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)\right\} \\ &= 3e^{-j4\pi f} \frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} \text{sinc}(4f) \\ &= 12e^{-j4\pi f} \text{sinc}(4f) \end{aligned}$$



v) Convolução:

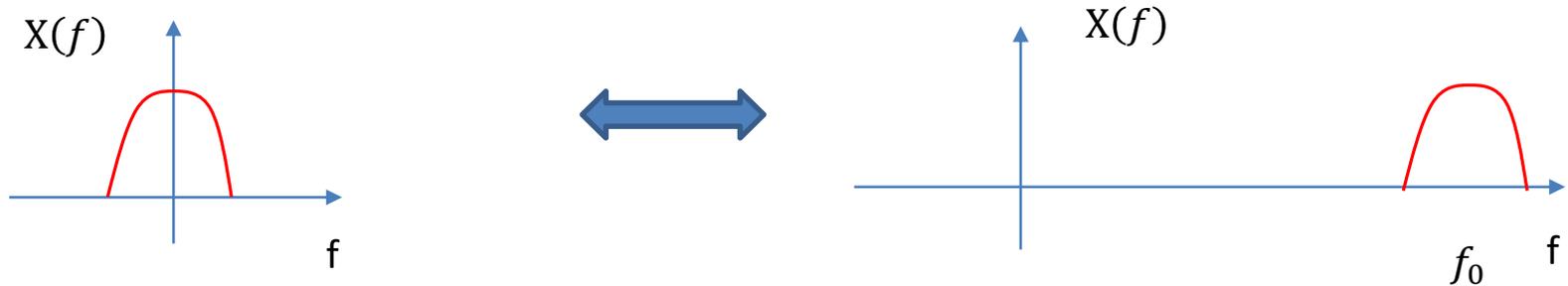
$$\begin{aligned}\mathfrak{T}\{x(t) * y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) e^{-j2\pi f (t - \tau)} dt \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau\end{aligned}$$

Fazendo-se $u = t - \tau$ tem-se

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-j2\pi f u} du \right]}_{Y(f)} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= X(f)Y(f) = \mathfrak{T}\{x(t)\}\mathfrak{T}\{y(t)\}\end{aligned}$$

vi) Modulação

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt \\ &= X(f - f_0)\end{aligned}$$





Exemplo 18

Determine a transformada de Fourier dos seguintes sinais:

a) $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

b) $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

c) $z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$



Solução:

a)

$$\begin{aligned} X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\} &= \mathfrak{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} \\ &= \delta(f - f_0) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Y(f) = \mathfrak{F}\{y(t)\} &= \mathfrak{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \end{aligned}$$



c)

$$\begin{aligned} Z(f) &= \mathfrak{F}\{z(t)\} = \mathfrak{F}\{x(t) \cos(2\pi f_0 t)\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{x(t) \left(\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) \end{aligned}$$



vii) Relação de Parseval

Se as transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$ são denotadas por $X(f)$ e $Y(f)$, respectivamente, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f)df$$

Se fizermos $x(t) = y(t)$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df,$$

que é conhecido por Teorema de Rayleigh.



viii) Autocorrelação

A função autocorrelação de um sinal $x(t)$ é dada por

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt = x(\tau) x^*(-\tau)$$

O Teorema da autocorrelação estabelece que

$$\mathfrak{F}\{R_x(\tau)\} = |X(f)|^2$$



ix) Diferenciação:

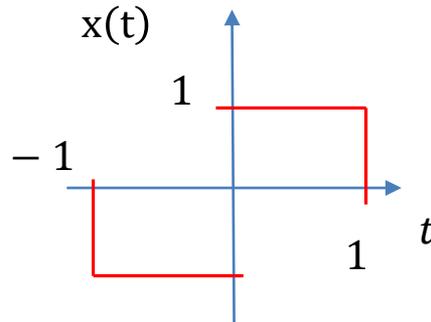
A transformada de Fourier da derivada do sinal pode ser obtida por

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j2\pi fX(f)$$



Exemplo 19

Calcule a transformada de Fourier do sinal $x(t) = \frac{d}{dt} \text{tri}(t)$





Solução:

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt}\text{tri}(t)\right\} \\ &= j2\pi f \mathfrak{F}\{\text{tri}(t)\} \\ &= j2\pi f \text{sinc}^2(f) \end{aligned}$$



x) Diferenciação no domínio da frequência

$$\mathfrak{F}\{t^n x(t)\} = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

xi) Integração

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$



xii) Momentos

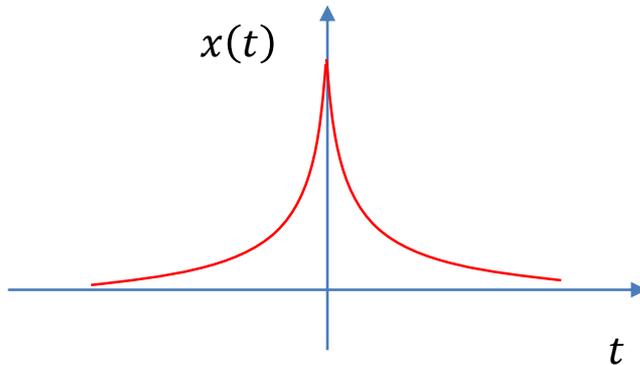
Se $X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$ então o n-ésimo momento de $x(t)$ é dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t) dt = \left(\frac{j}{2\pi} \right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f) \Big|_{f=0}$$



Exemplo 20

Calcule a transformada de Fourier do sinal $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$





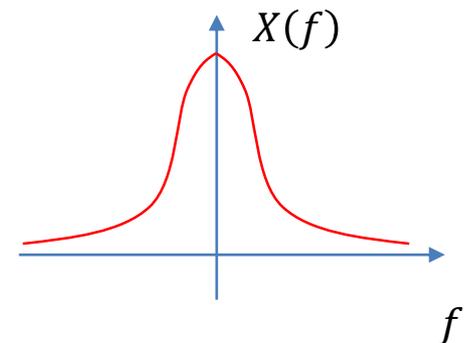
Solução:

Pode-se escrever $x(t)$ como

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t)$$

Então calcula-se a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathfrak{F}\{e^{-\alpha t}u(t)\} + \mathfrak{F}\{e^{\alpha t}u(-t)\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j2\pi ft} dt + \mathfrak{F}\{e^{\alpha t}u(-t)\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j2\pi f)t} dt + \mathfrak{F}\{e^{\alpha t}u(-t)\} \\ &= \frac{1}{\alpha+j2\pi f} + \frac{1}{\alpha-j2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$





Transformada de Fourier de sinais periódicos

- A transformada de Fourier de sinais periódicos consiste em funções impulso no domínio da frequência.
- Considere um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 e sejam x_n os coeficientes da expansão em série de Fourier do sinal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\frac{j2\pi n t}{T_0}}$$

- Calculando-se a transformada de Fourier de $x(t)$, obtém-se

$$X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right),$$

o que mostra que a transformada de Fourier de um sinal periódico é uma sequência de impulsos na frequência espaçados por T_0 .



- Se definirmos o sinal truncado $x_{T_0}(t)$ como

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pode-se escrever

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0)$$

- Como $x_{T_0}(t - nT_0) = x_{T_0}(t) * \delta(t - nT_0)$, tem-se

$$x(t) = x_{T_0}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$



- Logo, usando-se o teorema da convolução, obtém-se

$$\begin{aligned} X(f) &= X_{T_0}(f) \left[\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \end{aligned}$$

- Comparando-se o resultado anterior com

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right),$$

conclui-se que

$$x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right).$$



Resumo do procedimento

Dado um sinal periódico $x(t)$, pode-se encontrar x_n da seguinte forma:

- i) Determina-se o sinal truncado $x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- ii) Calcula-se a transformada de Fourier do sinal truncado $x_{T_0}(t)$
- iii) Avalia-se a transformada de Fourier do sinal truncado $x_{T_0}(t)$ em $f = \frac{n}{T_0}$ e escalada por $\frac{1}{T_0}$:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right),$$

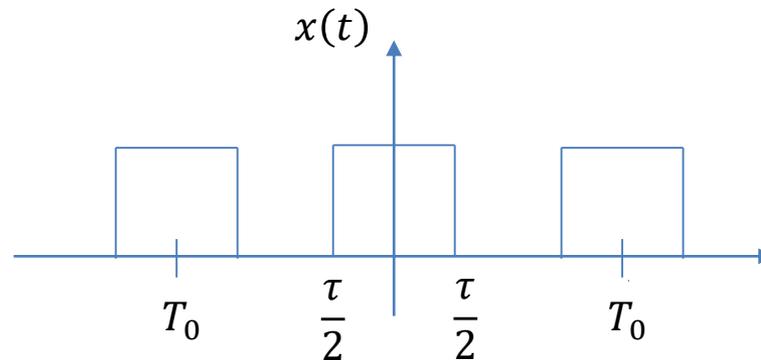
em que $x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)$.

Exemplo 21

Determine os coeficientes da série de Fourier do sinal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{t - nT_0}{\tau} \right),$$

em que τ é uma constante que corresponde a largura do pulso.





Solução:

O sinal truncado é dado por

$$x_{T_0}(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right)$$

A transformada de Fourier de $x_{T_0}(t)$ é descrita por

$$X(f) = \mathfrak{F}\{x_{T_0}(t)\} = \tau \text{sinc}(\tau f)$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0} X_{T_0} \left(\frac{n}{T_0} \right) = \frac{\tau}{T_0} \text{sinc} \left(\frac{n\tau}{T_0} \right) \\ X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta \left(f - \frac{n}{T_0} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_0} \text{sinc} \left(\frac{n\tau}{T_0} \right) \delta \left(f - \frac{n}{T_0} \right) \end{aligned}$$



Transmissão em canais de comunicações

- Os canais de comunicações podem ser modelados como sistemas LTI.
- Logo, a transmissão de sinais em canais de comunicações pode ser modelada como a transmissão de sinais em sistemas LTI.
- O teorema da convolução serve como ferramenta para analisar problemas de transmissão do tipo

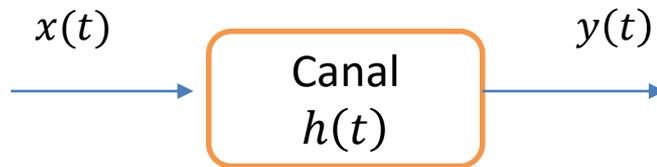
$$Y(f) = H(f)X(f),$$

em que $X(f)$, $H(f)$ e $Y(f)$ são as transformadas de Fourier dos sinais de entrada, do canal e da resposta do sistema.



Exemplo 22

Calcule a resposta $y(t)$ do seguinte sistema de transmissão.



em que $x(t) = \text{sinc}(W_1 t)$ e $h(t) = \text{sinc}(W_2 t)$



Usando a transformada de Fourier, tem-se

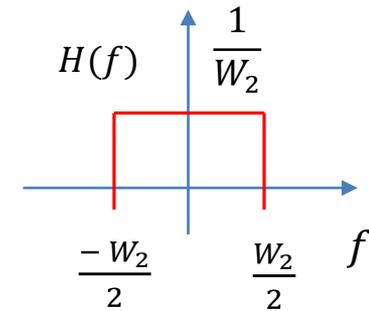
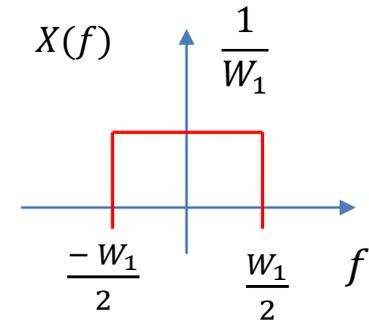
$$X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathfrak{F}\{\text{sinc}(W_1 t)\} = \frac{1}{W_1} \text{rect}\left(\frac{f}{W_1}\right)$$

e

$$H(f) = \mathfrak{F}\{h(t)\} = \mathfrak{F}\{\text{sinc}(W_2 t)\} = \frac{1}{W_2} \text{rect}\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

A saída é dada por

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{W_2} \frac{1}{W_1} \text{rect}\left(\frac{f}{W_2}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{W_1}\right) \\ = \begin{cases} \frac{1}{W_2} \frac{1}{W_1} \text{rect}\left(\frac{f}{W_1}\right), & W_1 \leq W_2 \\ \frac{1}{W_2} \frac{1}{W_1} \text{rect}\left(\frac{f}{W_2}\right), & W_2 < W_1 \end{cases}$$

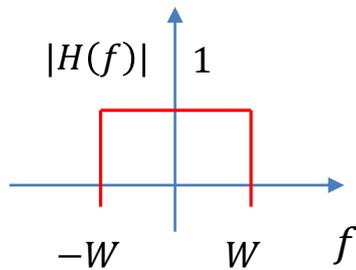




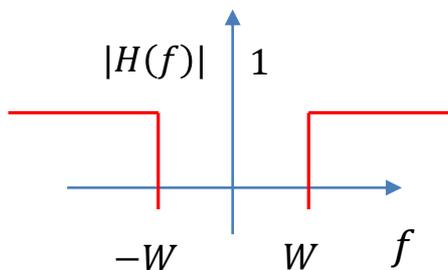
No domínio do tempo, tem-se um sinal passa-baixa dado por

$$y(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{Y(f)\} = \begin{cases} \frac{1}{W_2} \text{sinc}(W_1 t), & W_1 \leq W_2 \\ \frac{1}{W_1} \text{sinc}(W_2 t), & W_2 < W_1 \end{cases}$$

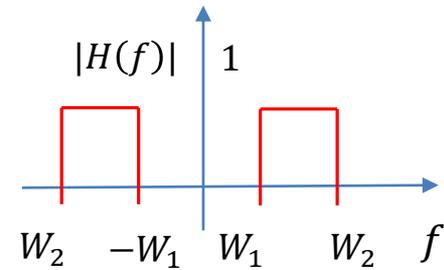
- Sinais com uma representação no domínio da frequência que contém frequências próximas da origem são sinais passa-baixa.
- Um sistema LTI que deixa passar todas as frequências abaixo de W e rejeita as frequências acima de W é um sistema passa-baixa ideal.
- Exemplos de sistemas passa-baixa, passa-alta e passa-faixa ideais são mostrados abaixo.



passa-baixa

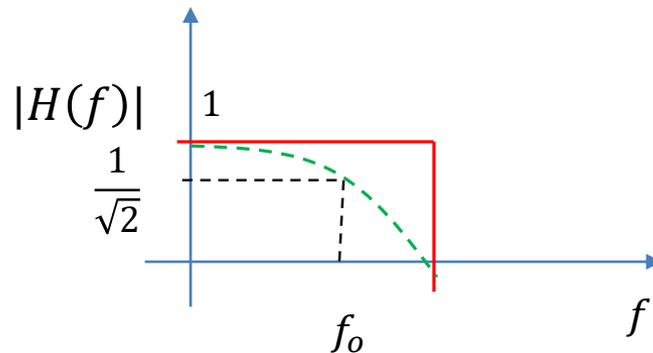


passa-alta



passa-faixa

- Em filtros passa-baixa, passa-alta e passa-faixa não ideais, a largura de faixa é usualmente definida em termos da redução de 50% de $|H(f)|^2$.
- Essa largura de faixa é conhecida como faixa de 3dB do filtro e é ilustrada por



- A frequência f_0 determina a largura de faixa de 3dB do filtro.



Exemplo 23

A magnitude da função de transferência de um filtro é descrita por

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{10000}\right)^2}}$$

Determine o tipo de filtro e a sua largura de faixa de 3dB.



Solução:

Em $f = 0$, tem-se $|H(f)| = 1$ e $|H(f)|$ diminui à medida que $f \rightarrow \infty$.

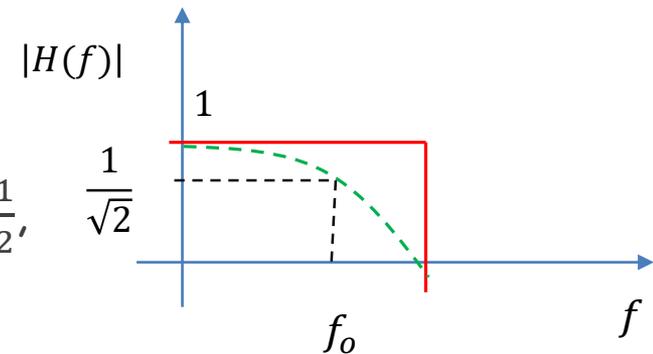
Logo, trata-se de um filtro passa-baixa.

Para obter a largura de faixa de 3dB faz-se

$$|H(f_o)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f_o}{10000}\right)^2} = \frac{1}{2} |H(0)|^2 = \frac{1}{2},$$

o que resulta em

$$f_o = 10000\text{Hz ou } 10 \text{ kHz.}$$



Logo, o filtro é passa-baixa e possui uma largura de faixa de 3dB de 10KHz.



D. Energia e potência

- A energia de um sinal $x(t)$ é definida por

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- A potência de um sinal $x(t)$ é descrita por

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- A seguir, serão consideradas as funções densidade espectral de potência e autocorrelação dos sinais do tipo energia e potência.



- Para um sinal do tipo energia $x(t)$, define-se a função autocorrelação

$$\begin{aligned}R_x(\tau) &= x(\tau) * x^*(-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt\end{aligned}$$

- Fazendo-se $\tau = 0$, obtém-se

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$



- Um sinal $x(t)$ aplicado a um canal de comunicações modelado como um sistema LTI com resposta ao impulso $h(t)$ resulta na saída

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

ou

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

- A energia de $y(t)$ é descrita por

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df = R_y(0),\end{aligned}$$

em que $R_y(\tau) = y(\tau) * y^*(-\tau)$ é a função autocorrelação de $y(t)$.



- A transformada inversa de Fourier de $|Y(f)|^2$ é dada por

$$\begin{aligned}R_y(\tau) &= \mathfrak{F}^{-1}\{|Y(f)|^2\} = \mathfrak{F}^{-1}\{|H(f)|^2|X(f)|^2\} \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{|H(f)|^2\}\mathfrak{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} \\ &= R_h(\tau) * R_x(\tau)\end{aligned}$$

- Supondo-se que $H(f) = \begin{cases} 1, & W < f < W + \nabla W \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ tem-se

$$|Y(f)|^2 = \begin{cases} |X(f)|^2, & W < f < W + \nabla W \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

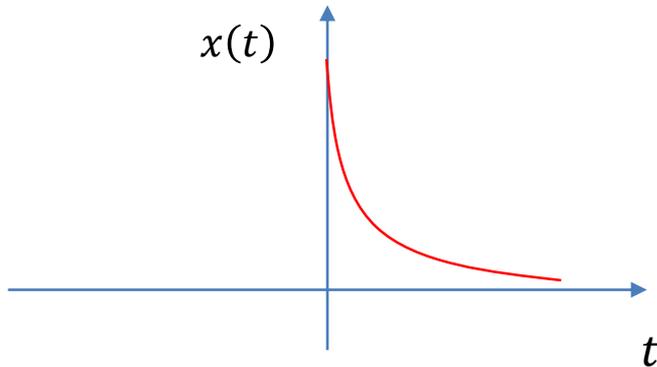
e

$$\varepsilon_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$



Exemplo 24

Determine a função autocorrelação, a densidade espectral de energia e a energia do sinal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$.





Solução:

A transformada de Fourier do sinal é dada por

$$X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

O módulo ao quadrado do sinal indica a densidade espectral de energia, que é dada por

$$\varepsilon_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$



A função autocorrelação do sinal é calculada por

$$R_x(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

A energia do sinal é calculada por

$$R_x(0) = \frac{1}{2\alpha}$$



- A função autocorrelação de média temporal de $x(t)$ é definida por

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t - \tau) dt$$

- A densidade espectral de potência de $x(t)$ é descrita por

$$S_x(f) = \mathfrak{F}\{R_x(\tau)\},$$

em que $R_x(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{S_x(f)\}$ e $P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$.



- Um sinal do tipo potência $x(t)$ aplicado a um canal de comunicações modelado por um sistema LTI com resposta $h(t)$ gera a resposta

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

- A função autocorrelação de média temporal para o sinal $y(t)$ é dada por

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)y^*(t - \tau)dt$$

- Substituindo-se $y(t)$ obtém-se

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t - u)du \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} h^*(v)x^*(t - \tau - v)dv \right] dt$$



- Introduzindo uma mudança de variável $w = t - u$, obtém-se

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t-u)x^*(u+w-\tau-v)]dw]dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v)R_x(\tau+v-u)dudv = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau) \end{aligned}$$

- Calculando-se a transformada de Fourier da expressão acima, tem-se

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \mathfrak{F}\{R_y(\tau)\} = H(f)H^*(f)S_x(f) \\ &= |H(f)|^2 S_x(f) \end{aligned}$$



- Suponha que o sinal $x(t)$ é periódico com período T_0 e tem-se os coeficientes de Fourier $\{x_n\}$ da sua expansão.
- A função autocorrelação de média temporal é dada por

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt \end{aligned}$$

- Usando a expansão em série de Fourier, obtém-se

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* e^{\frac{j2\pi n}{T_0}\tau} e^{\frac{j2\pi(m-n)}{T_0}t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 e^{\frac{j2\pi n}{T_0}\tau} \end{aligned}$$



- A densidade espectral de potência de um sinal periódico é dada por

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \mathfrak{F}\{R_x(\tau)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right), \end{aligned}$$

em que a potência do sinal periódico $x(t)$ é

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$



- Se o sinal periódico for aplicado a um canal de comunicações modelado como um sistema LTI com resposta em frequência $H(f)$ obtém-se

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \mathfrak{F}\{R_y(\tau)\} = H(f)H^*(f)S_x(f) \\ &= |H(f)|^2 S_x(f) \\ &= |H(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 |H\left(\frac{n}{T_0}\right)|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \end{aligned}$$

- A potência do sinal $y(t)$ é dada por

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 |H\left(\frac{n}{T_0}\right)|^2$$

E. Transformada de Hilbert

- A transformada de Hilbert de um sinal $x(t)$ desloca os componentes em frequência deste sinal em 90° , gerando o sinal $\hat{x}(t)$.
- A transformada de Hilbert é muito útil em comunicações e processamento de sinais, e foi inventada por David Hilbert.
- David Hilbert foi um dos mais influentes matemáticos alemães nos séculos 19 e 20.
- Hilbert foi professor na Universidade de Goettingen e desenvolveu muitas ideias nas áreas de álgebra, geometria, operadores espectrais e física matemática.





- Por exemplo, a transformada de Hilbert do sinal

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

é dada por

$$\hat{x}(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta - 90^\circ) = A\sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

- A transformada de Fourier do sinal $\hat{x}(t)$ equivale à multiplicação de $X(f)$ por $-j\text{sgn}(f)$:

$$\hat{X}(f) = \mathfrak{F}\{\hat{x}(t)\} = -j\text{sgn}(f)X(f)$$

e

$$\hat{x}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\hat{X}(f)\} = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{1}{t - \tau} d\tau$$



Exemplo 25

Determine a transformada de Hilbert de $x(t) = 2\text{sinc}(2t)$



Solução:

A transformada de Fourier de $x(t) = 2\text{sinc}(2t)$ é descrita por

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = 2\mathfrak{F}\{\text{sinc}(2t)\} \\ &= 2 \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \\ &= \text{rect}\left(f + \frac{1}{2}\right) + \text{rect}\left(f - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$



Para obter a representação no domínio da frequência da transformada de Hilbert de $x(t)$, emprega-se

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= \mathfrak{F}\{\hat{x}(t)\} = -j\text{sgn}(f)X(f) \\ &= -j\text{sgn}(f) \left(\text{rect}\left(f + \frac{1}{2}\right) + \text{rect}\left(f - \frac{1}{2}\right) \right) \\ &= j\text{sgn}(f)\text{rect}\left(f + \frac{1}{2}\right) - j\text{rect}\left(f - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Calculando-se a transformada inversa de Fourier de $\hat{X}(f)$, obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{\hat{X}(f)\} \\ &= je^{-j\pi t}\text{sinc}(t) - je^{j\pi t}\text{sinc}(t) \\ &= -j(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t})\text{sinc}(t) \\ &= -j2j\sin(\pi t)\text{sinc}(t) \\ &= 2\sin(\pi t)\text{sinc}(t)\end{aligned}$$



Propriedades

i) Transformação de sinais pares e ímpares:

a transformada de Hilbert de um sinal par é ímpar , enquanto a transformada de Hilbert de um sinal ímpar é par.

ii) Reversão de sinal:

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$



iii) Energia:

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}(f)|^2 df$$

iv) Ortogonalidade:

O sinal $x(t)$ e sua transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ são ortogonais.



F. Sinais passa-baixa e passa-faixa

- Um sinal passa-baixa é um sinal cujo espectro é localizado em torno da frequência zero.
- Um sinal passa-faixa é um sinal cujo espectro é localizado em torno de uma frequência f_c , que é muito maior do que a largura de faixa do sinal.
- Considere um sinal passa-faixa descrito por

$$\begin{aligned}x(t) &= A\cos(2\pi f_c t + \theta) \\ &= A\cos(\theta)\cos(2\pi f_c t) - A\sin(\theta)\sin(2\pi f_c t) \\ &= x_c\cos(2\pi f_c t) - x_s\sin(2\pi f_c t),\end{aligned}$$

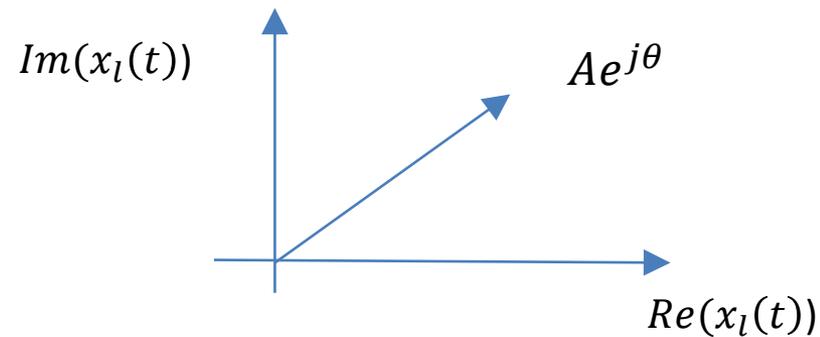
em que $x_c = A\cos(\theta)$ é chamado de componente em fase e $x_s = A\sin(\theta)$ é o componente em quadratura.



- O sinal passa-baixa pode também ser descrito como um fasor:

$$\begin{aligned}x_l(t) &= A(t)e^{j\theta(t)} \\ &= x_c(t) + jx_s(t),\end{aligned}$$

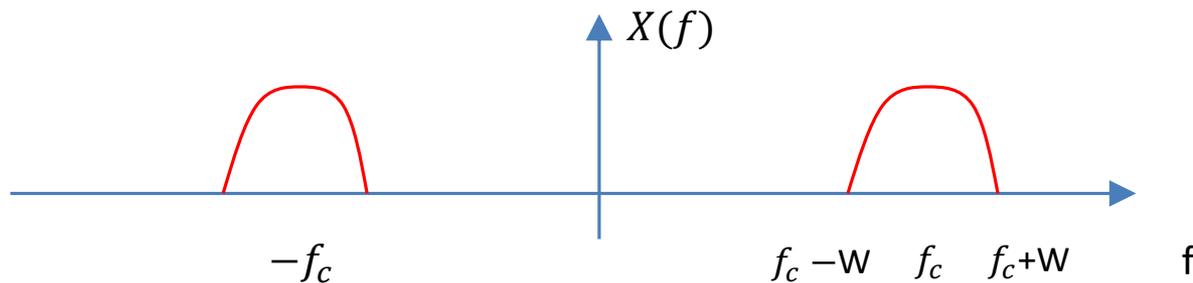
em que $A(t)$ e $\theta(t)$ variam lentamente.



- Pode-se então reescrever o sinal passa-faixa $x(t)$ como

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(2\pi f_c t + \theta) \\&= \text{Re} [A(t) e^{j(2\pi f_c t + \theta(t))}] \\&= A(t) \cos(\theta) \cos(2\pi f_c t) - A(t) \sin(\theta) \sin(2\pi f_c t) \\&= x_c(t) \cos(2\pi f_c t) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t),\end{aligned}$$

que contém uma faixa de frequências.





- Nesse caso, os componentes em fase e em quadratura são

$$x_c(t) = A(t)\cos(\theta)$$

e

$$x_s(t) = A(t)\sin(\theta),$$

- O sinal passa-faixa pode ser expresso como

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_c t) - x_s(t)\sin(2\pi f_c t),$$

em que os componente em fase e em quadratura são sinais passa-baixa, o que permite a representação do sinal passa-baixa complexo como

$$x_l(t) = A(t)e^{j\theta(t)} = x_c(t) + jx_s(t),$$

que é conhecido como o equivalente passa-baixa de $x(t)$.



- A representação do sinal passa-baixa $x_l(t)$ em coordenadas polares é dada por

$$\begin{aligned}x_l(t) &= A(t)e^{j\theta(t)} \\ &= \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}e^{j\tan^{-1}\left\{\frac{x_s(t)}{x_c(t)}\right\}},\end{aligned}$$

em que a envoltória e a fase do sinal passa-baixa são descritas por

$$\begin{aligned}|x_l(t)| &= A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \arg x_l(t) &= \theta(t) = \tan^{-1}\left\{\frac{x_s(t)}{x_c(t)}\right\}\end{aligned}$$



- Usando as relações entre os sinais passa-faixa $x(t)$ e passa-baixa $x_l(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}x(t) &= \text{Re} [x_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \\ &= \text{Re} [A(t)e^{j(2\pi f_c t + \theta(t))}] \\ &= A(t) \cos(2\pi f_c t + \theta),\end{aligned}$$

que é uma forma de expressar um sinal em termos da envoltória complexa e da fase do sinal passa-faixa.



Exemplo 26

Considere uma mensagem $m(t)$ a ser transmitida em um sinal passa-faixa descrito por

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) - \hat{m}(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

- Determine a envoltória e o equivalente passa-baixa do sinal $x(t)$
- Determine e esboce a transformada de Fourier de $x(t)$



Solução:

a)

A envoltória do sinal pode ser escrita como

$$\begin{aligned}z(t) &= x(t) + j\hat{x}(t) \\ &= m(t) \cos(2\pi f_0 t) - \hat{m}(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \\ &\quad + j[\hat{m}(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) - m(t) \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= (m(t) + j\hat{m}(t))e^{j2\pi f_0 t}\end{aligned}$$

O equivalente passa-baixa do sinal é dado por

$$\begin{aligned}x_l(t) &= x_c(t) + jx_s(t) \\ &= z(t)e^{-j2\pi f_0 t} = m(t) + j\hat{m}(t)\end{aligned}$$



b) A transformada de Fourier de $m(t)$ é $M(f)$ e a transformada de Fourier de $x(t)$ é descrita por

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathfrak{F}\{m(t) \cos(2\pi f_0 t) - \hat{m}(t) \sin(2\pi f_0 t)\} \\ &= M(f) * \frac{[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]}{2} - (-j \operatorname{sgn}(f) M(f)) * \frac{[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]}{2j} \\ &= \frac{1}{2} M(f + f_0) [1 - \operatorname{sgn}(f + f_0)] + \frac{1}{2} M(f - f_0) [1 - \operatorname{sgn}(f - f_0)] \end{aligned}$$

