



Princípios de Comunicações

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br



IV. Conversão analógico-digital

- A. Amostragem de sinais
- B. Quantização
- C. Codificação de formas de onda
- D. Aplicações



Introdução

- Neste capítulo, são estudadas técnicas que convertem sinais analógicos em sinais digitais.
- Para essa conversão, sinais analógicos precisam ser amostrados para obtenção de sinais discretos no tempo.
- Em seguida, os valores das amostras dos sinais discretos representados com valores contínuos são arredondados usando um número finito de valores.
- Esse processo de arredondamento é conhecido por quantização e produz sinais digitais.
- Os sinais digitais que contém amostras quantizadas são codificados para transmissão em canais de comunicações.



A. Amostragem de sinais

- O teorema da amostragem é um dos resultados mais importantes em comunicações e processamento de sinais.
- O teorema foi descoberto de forma independente por E. Whittaker, H. Nyquist, C. Shannon e V. Kotelnikov.
- Esse teorema fornece uma ponte que conecta o mundo analógico e as comunicações digitais.
- A ideia de amostragem consiste na obtenção de uma aproximação de um sinal analógico com amostras obtidas em intervalos regulares de tempo.

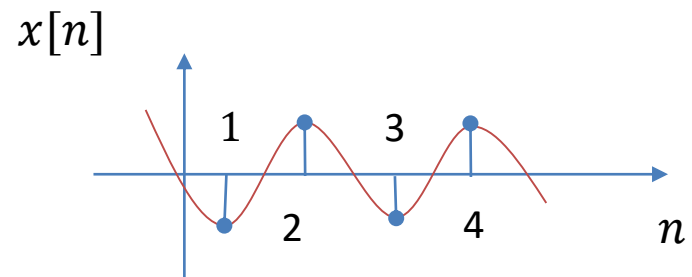
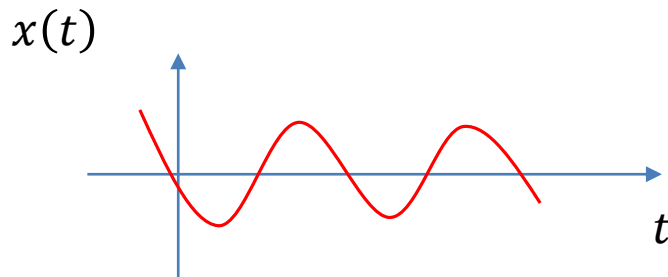


- Considere um sinal $x(t)$ que é limitado em faixa a W Hz, ou seja, se $X(f) = 0$ para $|f| \geq W$ então é suficiente amostrá-lo em intervalos de $T_s = \frac{1}{2W}$ segundos:

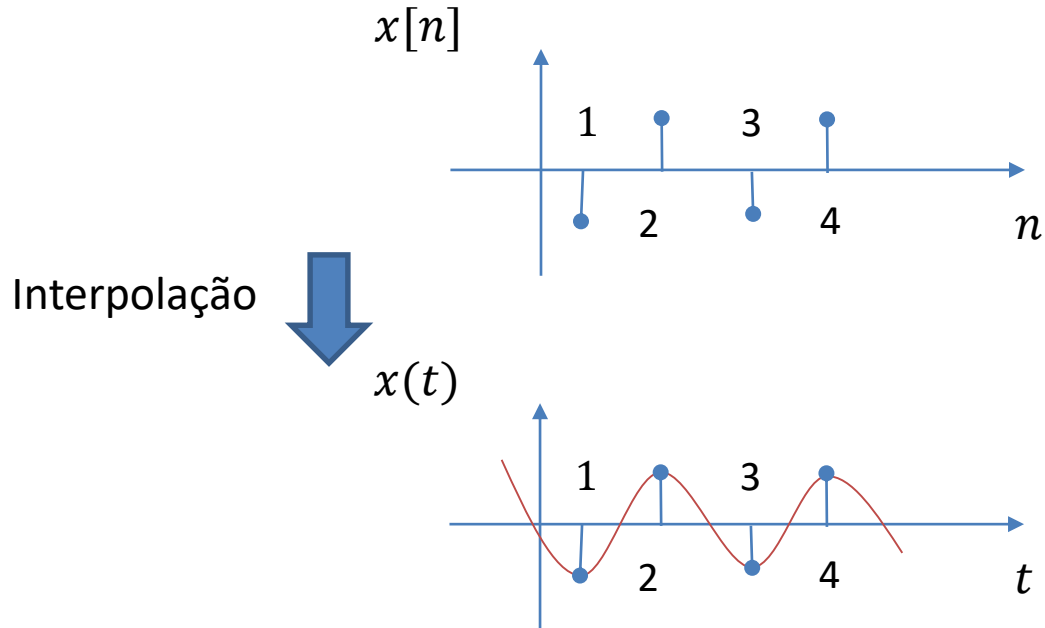
$$x[n] = x(t)|_{t = nT_s} = x(nT_s),$$

em que T_s é o período de amostragem, $f_s = \frac{1}{T_s}$ é a frequência de amostragem em amostras por segundo ou Hz e n é um inteiro.

- O processo de amostragem é ilustrado abaixo.



- Se o sinal $x(t)$ é amostrado a uma taxa de pelo menos $T_s = \frac{1}{2W}$ amostras por segundo então a teoria da amostragem assegura que o sinal $x(t)$ poder ser reconstruído a partir das amostras de $x[n]$.
- Isso pode ser ilustrado por





Teorema da amostragem

- Considere um sinal $x(t)$ que é limitado em faixa a W Hz, ou seja, $X(f) = 0$ para $|f| \geq W$.
- O sinal é amostrado a uma taxa de múltiplos do intervalo de amostragem T_s , em que $T_s = \frac{1}{2W}$, para produzir uma sequência discreta

$$x[n] = x(t)|_{t = nT_s} = x(nT_s)$$

- Logo, é possível reconstruir o sinal original $x(t)$ a partir do sinal $x[n]$ usando a fórmula de reconstrução

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2W'T_s x[nT_s] \text{sinc}[2W'(t - nT_s)],$$

em que W' é um número arbitrário que satisfaz $W \leq W' \leq \frac{1}{T_s} - W$.



- No caso especial em que $T_s = \frac{1}{2W}$, tem-se $W' = W = \frac{1}{2T_s}$ e a reconstrução é simplificada, resultando em

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] \text{sinc} \left(\frac{t}{T_s} - n \right),$$

em que $T_s = \frac{1}{2W}$ é chamada taxa de Nyquist.

- Na prática, a amostragem é realizada a uma taxa superior à taxa de Nyquist, que permite reconstrução do sinal analógico.
- Nesse caso, usa-se uma distância entre as cópias no espectro igual a $W_G = f_s - 2W$, que é chamada de faixa de guarda.



Demonstração

- Considere o sinal de amostragem representado por uma sequência de impulsos espaçados de T_s :

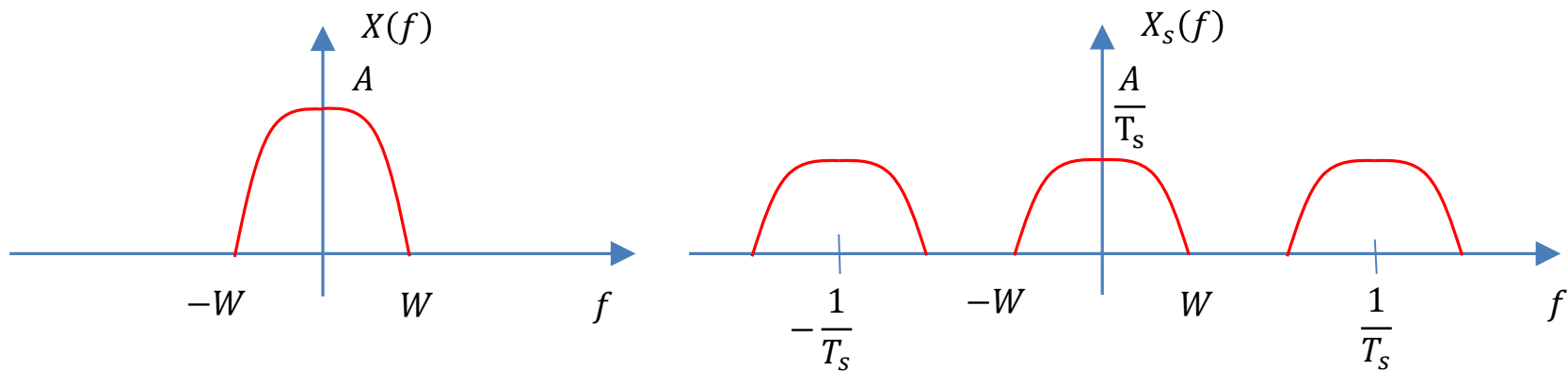
$$\begin{aligned}x_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s),\end{aligned}$$

em que a propriedade $x(t)\delta(t - nT_s) = x(nT_s)\delta(t - nT_s)$ é usada.

- Calculando-se a transformada de Fourier do sinal $x_s(t)$, obtém-se

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X(f) * \mathfrak{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right\} \\ &= X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_s} \right) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X \left(f - \frac{n}{T_s} \right), \end{aligned}$$

em que $X(f)$ e $X_s(f)$ são ilustradas abaixo.





- Se $T_s > \frac{1}{2W}$ (ou de forma equivalente $f_s < 2W$) então o espectro $X(f)$ se sobrepõe, resultando em aliasing e na impossibilidade de reconstruir $x(t)$.
- Entretanto, se $T_s \leq \frac{1}{2W}$ ou $f_s \geq 2W$ então não ocorre aliasing e, com a ajuda de um filtro, pode-se reconstruir $x(t)$.
- O filtro usado deve ser passa-baixa e ter a seguinte especificação:

$$H(f) = \begin{cases} T_s, & |f| < W \\ 0, & |f| \geq \frac{1}{T_s} - W \end{cases}$$

- Nota-se que para $W \leq |f| \leq \frac{1}{T_s} - W$ o filtro pode ser projetado mais facilmente.



- Considere um filtro passa-baixa ideal com largura de faixa W' , em que $W \leq W' \geq \frac{1}{T_s} - W$, com função de transferência

$$H(f) = T_s \text{rect} \left(\frac{f}{2W'} \right),$$

- Aplicando-se o filtro passa-baixa ao sinal $X_s(f)$, obtém-se

$$\begin{aligned} X(f) &= H(f)X_s(f) \\ &= T_s \text{rect} \left(\frac{f}{2W'} \right) X_s(f), \end{aligned}$$

em que $X_s(f)$ é a transformada de Fourier do sinal $x_s(t)$.



- Calculando-se a transformada inversa de Fourier de $X(f)$, obtém-se

$$\begin{aligned}x(t) &= x_s(t) * 2W'T_s \text{sinc}(2W't) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * 2W'T_s \text{sinc}(2W't) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2W'T_s x(nT_s) \text{sinc}(2W'(t - nT_s)),\end{aligned}$$

que mostra que com funções $\text{sinc}(\cdot)$ pode-se perfeitamente reconstruir o sinal $x(t)$.



- Se a amostragem for realizada a taxa de Nyquist $f_s = 2W$ então o filtro de reconstrução é um filtro passa-baixa com $W' = W = \frac{1}{2T_s}$, que produz

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)\end{aligned}$$



Exemplo 1

Um sinal limitado em faixa possui uma largura de faixa igual a 3,4 kHz.

Qual taxa de amostragem deveria ser usada para garantir uma faixa de guarda de 1,2 kHz?



Solução:

A frequência de amostragem deve ser

$$f_s = 2W + W_G,$$

em que a faixa de guarda é $W_G = 1,2$ kHz e a largura de faixa do sinal é $W = 3,4$ kHz.

Logo, tem-se

$$f_s = 2 \times 3,4k + 1,2k = 8 \text{ kHz}$$



Exemplo 2

O sinal contínuo no tempo descrito por

$$x_c(t) = \text{sen}(2\pi 100 t), \quad -\infty < t < \infty$$

é amostrado com uma taxa de amostragem igual a $T_s = \frac{1}{400}$ segundos para obter um sinal discreto no tempo $x[n]$.

- Expresse o sinal discreto no tempo $x[n]$ e a frequência de amostragem f_s .
- Escreva uma rotina em Matlab para esboçar $x_c(t)$ amostrado a 50 amostras por segundo e a 500 amostras por segundo.
- Escreva uma rotina em Matlab para ilustrar o sinal amostrado na frequência.
- Escreva um programa em Matlab para reconstruir o sinal $x_c(t)$ a partir das amostras no item b) com $T_s = \frac{1}{500}$.



Solução:

a) O sinal discreto no tempo é dado por

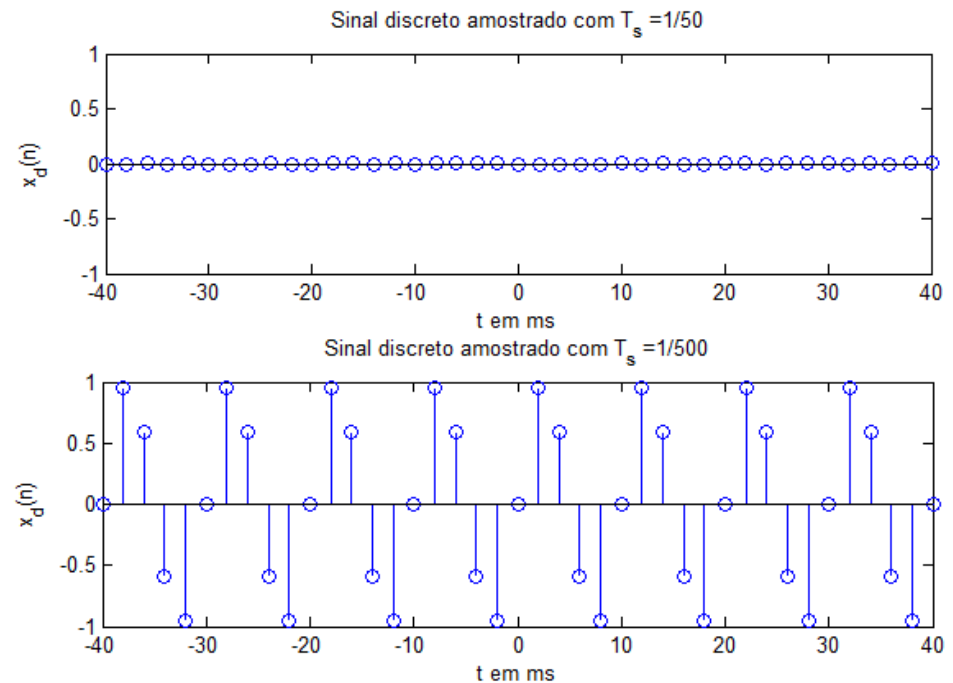
$$\begin{aligned}x[n] &= x_c(t) \Big|_{t = nT_s} = x_c(nT_s) \\ &= \text{sen} (2\pi \times 100nT_s) = \text{sen} \left(2\pi \times \frac{100n}{f_s} \right) \\ &= \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} n \right),\end{aligned}$$

enquanto $f_s = \frac{1}{T_s} = 400$ amostras / segundo

```

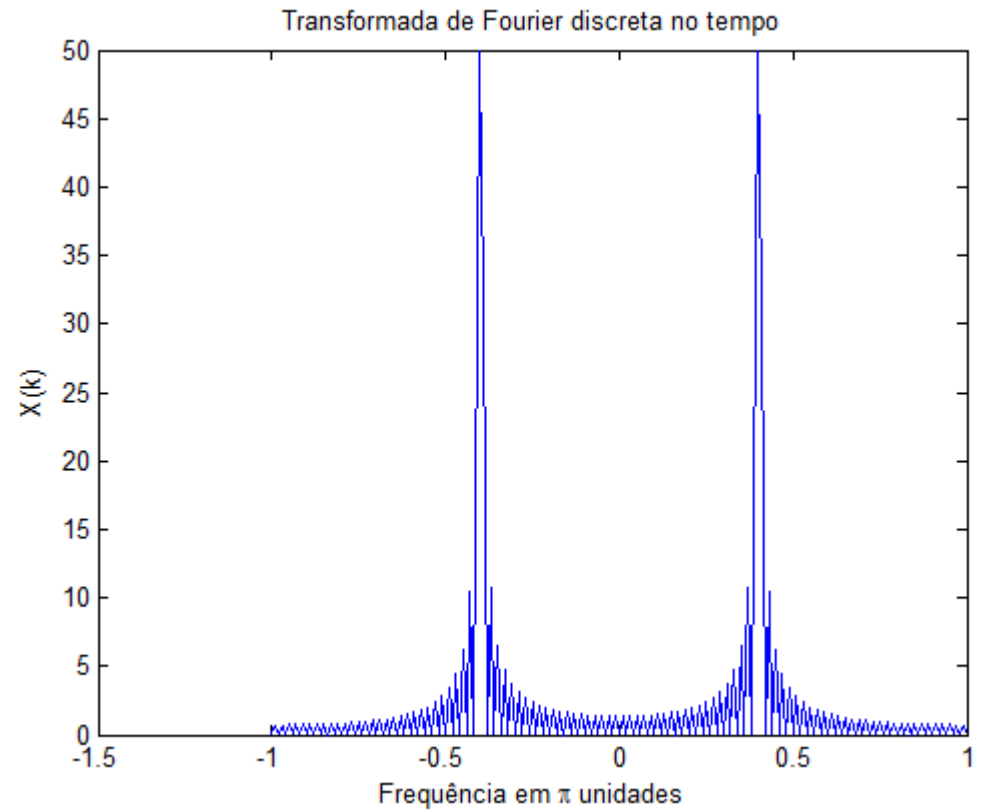
b)
% Geração de sinal "analógico"
intervalo = 0.0001; % suficientemente pequeno
t = -0.005:intervalo:0.005; % intervalo arbitrado - 1ms
xa = sin(2*pi*100*t);
% Sinal discreto no tempo
T_s1 = 1/50; % amostragem a 50 amostras por segundo
n = -20:1:20;
xd1 = sin(2*pi*100*n*T_s1);
T_s2 = 1/500;
xd2 = sin(2*pi*100*n*T_s2);
stem(n*T_s2*1000,xd1);
title(' Sinal discreto amostrado ');
xlabel('t em ms');
ylabel('x_d(n)');
figure;
stem(n*T_s2*1000,xd2);
title(' Sinal discreto amostrado ');
xlabel('t em ms');
ylabel('x_d(n)');

```





```
c)
% Sinal discreto no tempo
T_s1 = 1/500;
K = 100; % pontos
n = 0:1:K;
xd1 = sin(2*pi*100*n*T_s1);
% DTFT
k = -K:1:K;
w = (pi/K)*k;
X1 = xd1*exp(-j*n'*w);
stem(n*T_s1*1000,xd1);
title(' Sinal discreto amostrado');
xlabel('t em ms');
ylabel('x_d(n)');
figure;
plot(w/pi,abs(X1));
title(' Transformada de Fourier discreta no tempo');
xlabel('Frequência em \pi unidades');
ylabel('X(k)');
```

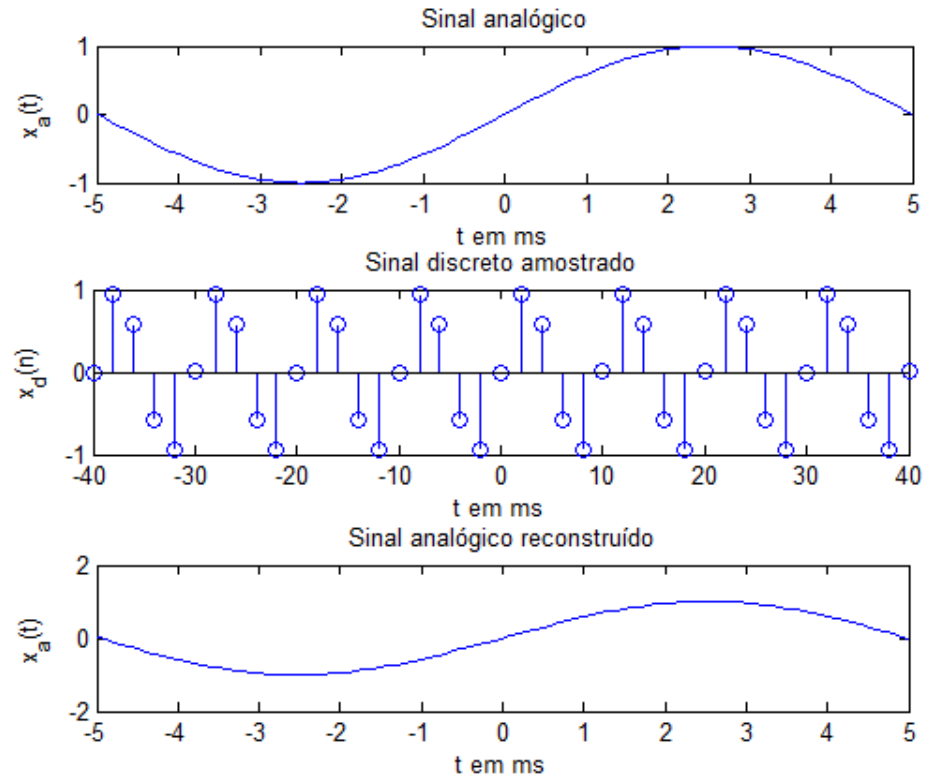


d)

```

% Sinal analógico
intervalo = 0.0001; % suficientemente pequeno
t = -0.005:intervalo:0.005; % intervalo arbit.
xa = sin(2*pi*100*t);
plot(t*1000,xa);
title(' Sinal analógico ');
xlabel('t em ms');
ylabel('x_a(t)');
% Sinal discreto no tempo
T_s1 = 1/500;
F_s1 = 1/T_s1;
n = -20:1:20;
xd1 = sin(2*pi*100*n*T_s1);
figure;
stem(n*T_s1*1000,xd1);
title(' Sinal discreto amostrado ');
xlabel('t em ms');
ylabel('x_d(n)');
% Sinal analógico reconstruído
ya = xd1*sinc(F_s1*(ones(length(n),1)*t-n'*T_s1*ones(1,length(t))));
figure;
plot(t*1000,ya);
title(' Sinal analógico reconstruído ');
xlabel('t em ms');
ylabel('x_a(t)');

```

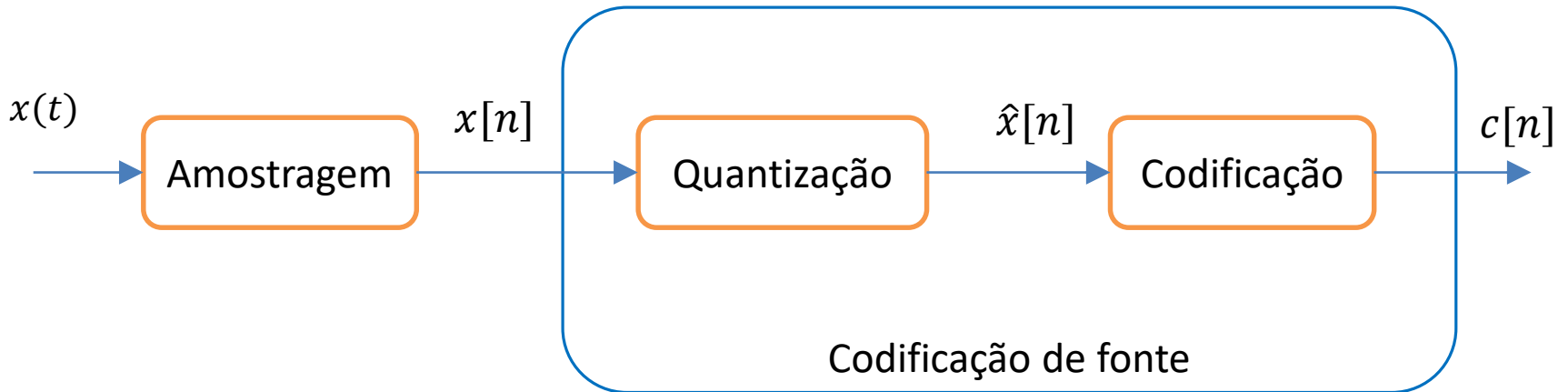




B. Quantização

- Após a amostragem, é obtido um sinal discreto com amplitudes contínuas e amostras espaçadas por múltiplos inteiros do período de amostragem T_s .
- Entretanto, a transmissão de sinais discretos com amplitudes contínuas requer um número infinito de bits, o que é impraticável.
- Logo, emprega-se quantização para representar as amplitudes com um número finito de bits, o que permite transmissão em faixas de frequências.
- Nesta seção, são estudados métodos de quantização, que incluem a quantização escalar e a quantização vetorial.

- Dado um sinal $x(t)$ limitado em faixa, com amostragem pode-se representá-lo usando uma sequência de amostras $x[n]$, conforme ilustrado abaixo.



- O processo de quantização envolve etapas e inclui diferentes aplicações:
 - Discretização das amplitudes de $x[n]$
 - Projeto do quantizador através da minimização de uma distorção
 - Compressão com perdas.



- Estratégia simples de codificação:

$\hat{x}[n] \rightarrow \mathbf{c}_k$ Palavra-código binária



l_k bits

- Taxa:

$$R = \log_2 N \text{ bits/amostra}$$

$$= l_k f_s \text{ bits/segundo}$$

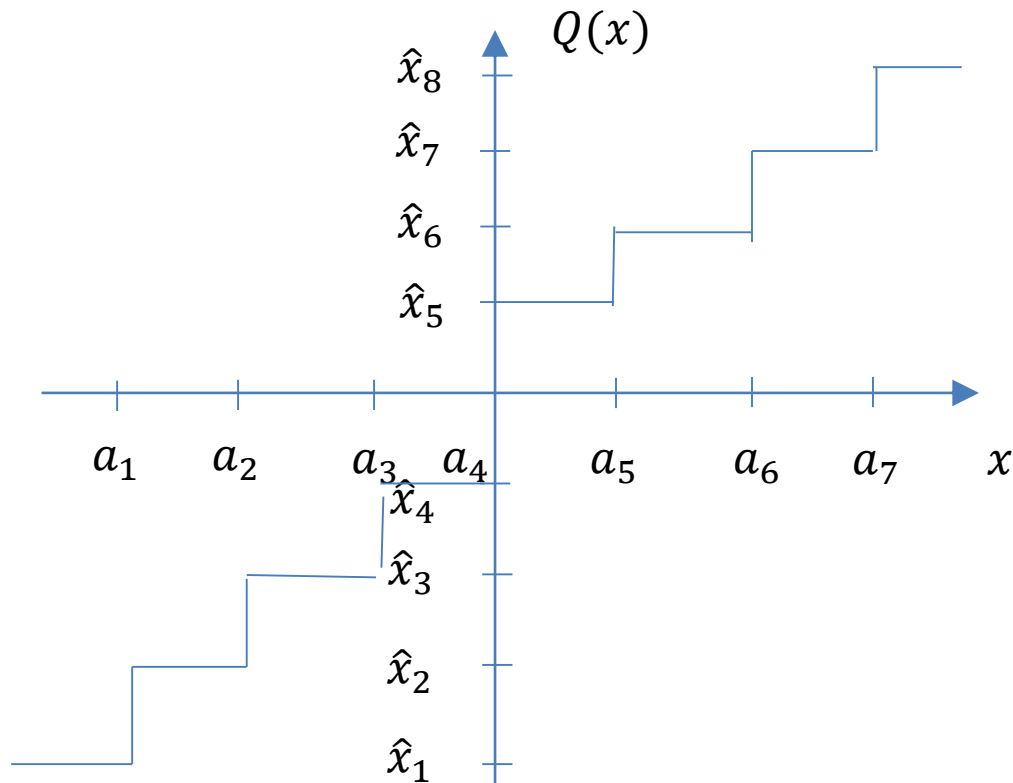
em que l_k é o comprimento da palavra-código e f_s é a frequência de amostragem.



Quantização escalar

- Na quantização escalar, cada amostra é quantizada em um entre um número finito de níveis e codificada em uma palavra-código binária.
- A quantização pode ser interpretada como uma operação em que cada amostra é arredondada para o valor mais próximo de um conjunto finito de níveis.
- O conjunto de números reais \mathbb{R} é particionado em N subconjuntos disjuntos \mathcal{R}_k , $1 \leq k \leq N$, chamados de regiões de quantização.
- Correspondendo a cada \mathcal{R}_k um nível de quantização \hat{x}_k é escolhido. Se a amostra no tempo $x[n]$ pertence a \mathcal{R}_k então ela é representada por $\hat{x}[n]$.
- O conjunto de níveis de quantização compõe um dicionário $\mathcal{D} = \{\hat{x}_1; \dots; \hat{x}_N\}$
- Em seguida, $\hat{x}[n]$ é codificado como uma palavra-código binária e transmitida.

- A figura abaixo ilustra um quantizador com 8 níveis, em que 8 regiões são definidas por $\mathcal{R}_1 = (-\infty, a_1]$, $\mathcal{R}_2 = (a_1, a_2]$, $\mathcal{R}_3 = (a_2, a_3]$, $\mathcal{R}_4 = (a_3, a_4]$, $\mathcal{R}_5 = (a_4, a_5]$, $\mathcal{R}_6 = (a_5, a_6]$, $\mathcal{R}_7 = (a_6, a_7]$ e $\mathcal{R}_8 = (a_7, \infty]$.





- Dado um número de níveis de quantização, usa-se $\log_2 N$ bits para codificar esses níveis em palavras-código binárias, resultando na taxa

$$R = \log_2 N \text{ bits/amostra}$$

- Como resultado, a distorção da quantização é introduzida e pode ser medida.
- O procedimento de quantização pode ser matematicamente descrito por

$$\hat{x}[n] = Q[x[n]], \quad \text{para todos } x[n] \in \mathcal{R}_k$$

- Uma medida de distorção para quantificar a perda de informação devido à quantização pode ser usada.



- Uma medida de distorção muito usada é a distorção de erro quadrático:

$$\begin{aligned}d(x, \hat{x}) &= (x - \hat{x})^2 \\ &= (x - Q(x))^2 = e^2,\end{aligned}$$

em que x é a variável a ser quantizada, $e = x - Q(x)$ é o erro de quantização e $\hat{x} = Q(x)$ é o valor quantizado.

- Uma outra medida de distorção que trata x como uma variável aleatória é a distorção de erro médio quadrático (MSE) descrita por

$$\begin{aligned}D &= E[d(x, \hat{x})] = E[(x - \hat{x})^2] \\ &= E[(x - Q(x))^2],\end{aligned}$$

em que $\hat{x} = Q(x)$ é o valor quantizado.



Exemplo 3

Considere uma sequência de amostras $x[n] = \{0.8; -0.3; 0.6; 0.9; 0.2; -0.15; -0.7\}$ quantizada por um quantizador escalar de 3 bits com níveis de quantização contidos no seguinte dicionário:

$$\mathcal{D} = \{1; 0.75; 0.5; 0.25; -0.25; -0.5; -0.75; -1\}$$

Calcule a sequência quantizada $\hat{x}[n]$ supondo-se que o critério de distorção é o erro quadrático.



A sequência quantizada é obtida calculando-se o erro quadrático entre as amostras de $x[n]$ e os níveis de quantização $\hat{x}[n]$ no dicionário.

$$x[n] = \{0.8; -0.3; 0.6; 0.9; 0.2; -0.15; -0.7\}$$

Isto é feito escolhendo-se para cada amostra o nível de quantização que produz o menor erro quadrático:

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) = \arg \min_D (x[n] - Q(x[n]))^2$$

em que $D = \{1; 0.75; 0.5; 0.25; -0.25; -0.5; -0.75; -1\}$

A sequência quantizada resultante é descrita por

$$\hat{x}[n] = \{0.75; -0.25; 0.5; 1; 0.25; -0.25; -0.75\}$$

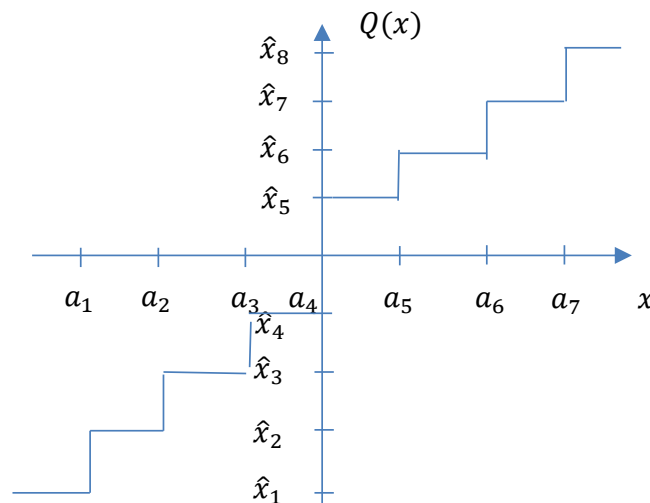


Tipos de quantizadores escalares

- Uniforme: as regiões de quantização são uniformes
- Não uniforme: as regiões de quantização são não uniformes e devem se adequar às características dos sinais.
- Adaptativo: pode se adaptar às variações das estatísticas do sinal.
- Ótimo: requer a fdp do sinal e um procedimento de otimização numérico e iterativo.

Quantização uniforme

- Quantizadores uniformes são os mais simples em que as regiões de decisão são particionadas igualmente, exceto pelas regiões extremas.
- Considere um quantizador uniforme com N regiões de \mathbb{R} , em que todas as regiões exceto \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_N , tem comprimento igual a resolução Δ .
- Isto mostra que para $1 \leq i \leq N - 2$, tem-se $\Delta = a_{i+1} - a_i$ e que os níveis de quantização estão a uma distância $\frac{\Delta}{2}$ dos limites a_1, a_2, \dots, a_{N-1} .





- Em um quantizador uniforme, a distorção MSE é dada por

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} \left(X - \left(a_1 - \frac{\Delta}{2} \right) \right)^2 p_x(X) dX + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_1+(i-1)\Delta}^{a_1+i\Delta} \left(X - \left(a_1+i\Delta - \frac{\Delta}{2} \right) \right)^2 p_x(X) dX \\ + \int_{a_1+(N-2)\Delta}^{\infty} \left(X - \left(a_1 + (N-2)\Delta + \frac{\Delta}{2} \right) \right)^2 p_x(X) dX,$$

em que D é uma função de a_1 e Δ .

- Para projetar um quantizador uniforme ótimo, calcula-se a derivada de D com relação a essas variáveis e encontra-se os valores que minimizam D .



- Supondo-se que $p_x(X)$ é uma função par de x então o quantizador ótimo terá propriedades simétricas.
- Logo, para N par, tem-se

$$a_i = -a_{N-i} = -\left(\frac{N}{2} - i\right)\Delta, \quad \text{para } 1 \leq i \leq \frac{N}{2}$$

$$a_{\frac{N}{2}} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{x}_i = \hat{x}_{N+1-i}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq \frac{N}{2}$$

- Nesse caso, a distorção D é descrita por

$$D = \int_{-\infty}^{(-\frac{N}{2}-1)\Delta} (X - \hat{x}_1)^2 p_x(X) dX + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \int_{(-\frac{N}{2}+i)\Delta}^{(-\frac{N}{2}+i+1)\Delta} (X - \hat{x}_{i+1})^2 p_x(X) dX$$



- Nesses casos, a minimização da distorção é feita por técnicas numéricas.
- A tabela mostra que o espaçamento ótimo dos níveis de quantização para uma variável aleatória de média zero e variância unitária quando $\hat{x}[n]$ são escolhidos como pontos médios das regiões de quantização.

Número de níveis (N)	Resolução Δ	MSE (D)
1	-	1.0
2	1.596	0.3634
4	0.9957	0.1188
8	0.5860	0.03744
16	0.3352	0.01154

J. Max, "Quantizing for Minimum Distortion," IEEE Trans. Information Theory, vol. 6, no. 1, pp. 7-12, March 1960.



Exemplo 4

Considere o sinal $x(t)$ modelado como um processo estocástico estacionário no sentido amplo com média zero e densidade espectral de potência

$$S_x(f) = \begin{cases} 2, & |f| < 100\text{Hz} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O sinal é amostrado a taxa de Nyquist e cada amostra é quantizada usando-se um quantizador uniforme de 8 níveis com $a_1 = -60$, $a_2 = -40$, $a_3 = -20$, $a_4 = 0$, $a_5 = 20$, $a_6 = 40$, $a_7 = 60$, $\hat{x}_1 = -70$, $\hat{x}_2 = -50$, $\hat{x}_3 = -30$, $\hat{x}_4 = -10$, $\hat{x}_5 = 10$, $\hat{x}_6 = 30$, $\hat{x}_7 = 50$ and $\hat{x}_8 = 70$.

a) Calcule a taxa de transmissão resultante.

b) Determine a distorção MSE.



Solução:

a) A taxa de Nyquist é descrita por

$$f_s = 2f_{\max} = 200 \text{ Hz}$$

Cada amostra é uma variável aleatória Gaussiana de média zero e variância

$$\sigma^2 = E[x_i^2] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \int_{-100}^{100} 2 df = 400$$

Como cada amostra é quantizada com 8 níveis, $\log_2 8 = 3$ bits são suficientes para codificar cada amostra. Logo, a taxa é dada por

$$R = \log_2 8 f_s = 600 \text{ bits/s}$$



b) Para calcular a distorção MSE, avalia-se

$$\begin{aligned} D &= E[(x - \hat{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - Q(x))^2 p_x(X) dX \\ &= \sum_{i=1}^8 \int_{\mathcal{R}_i} (X - Q(x))^2 p_x(X) dX \\ &= \int_{-\infty}^{a_1} (X - \hat{x}_1)^2 p_x(X) dX \\ &\quad + \sum_{i=2}^7 \int_{a_{i-1}}^{a_i} (X - \hat{x}_i)^2 p_x(X) dX + \int_{a_7}^{\infty} (X - \hat{x}_8)^2 p_x(X) dX \\ &= 33.4 \end{aligned}$$



Razão sinal-ruído de quantização

- Se a variável aleatória x é quantizada com $Q(x)$ então a razão sinal-ruído de quantização (SQNR) é definida por

$$\text{SQNR} = \frac{E[x^2]}{E[(x - Q(x))^2]} = \frac{P_x}{P_q}$$

- A potência do ruído de quantização é dada por

$$P_q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[(x - Q(x))^2] dt$$

- A potência do sinal é descrita por

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[x^2(t)] dt$$



Exemplo 5

Calcule a SQNR para o esquema de quantização descrito no exemplo 4.



Solução:

Como tem-se $P_x = 400$ e $P_q = D = 33.4$, obtém-se

$$\text{SQNR} = \frac{E[x^2]}{E[(x - Q(x))^2]} = \frac{P_x}{P_q} = \frac{400}{33.4}$$

Em dB, tem-se

$$\text{SQNR}_{dB} = 10 \log_{10} \text{SQNR} = 10.78 \text{ dB}$$



Quantização vetorial

- A ideia de quantização vetorial consiste no emprego de blocos de n amostras e o projeto do quantizador em um espaço Euclidiano n -dimensional.
- Essa abordagem vetorial resulta em aumento de desempenho para amostras correlacionadas.
- Suponha que as regiões de quantização no espaço Euclidiano n -dimensional sejam denotadas por \mathcal{R}_i , $1 \leq i \leq K$.
- Essas K regiões particionam o espaço n -dimensional e cada bloco de amostras de comprimento n é representado pelo vetor n -dimensional $x \in \mathbb{R}^n$.

Gray, R.M. (1984). "Vector Quantization". *IEEE ASSP Magazine*. **1** (2): 4–29.



- A quantização vetorial funciona da seguinte maneira:

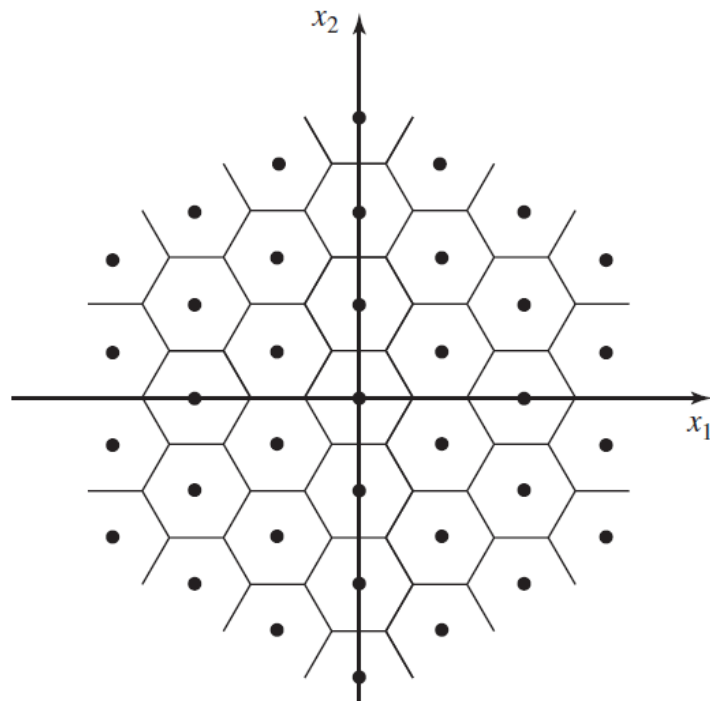
$$\text{Se } x \in \mathcal{R}_i$$

$$\text{Então } \hat{x}_i = Q(x)$$

- Como existem um total de K valores quantizados, $\log_2 K$ bits são suficientes para representar esses valores.
- Isto significa que são necessários $\log_2 K$ bits por n amostras, o que resulta na taxa

$$R = \frac{\log_2 K}{n} \text{ bits / amostra}$$

- Um exemplo de um quantizador vetorial com $n = 2$ é dado abaixo.





- O quantizador vetorial ótimo de dimensão n e K níveis escolhe as regiões \mathcal{R}_i e os valores quantizados \hat{x}_i tal que a distorção resultante é minimizada.
- Logo, emprega-se o seguinte critério para o projeto de um quantizador vetorial ótimo:
 - i) A região \mathcal{R}_i é o conjunto de todos os pontos no espaço n -dimensional que são mais próximos de \hat{x}_i do que qualquer outro \hat{x}_j , para $j \neq i$, ou seja,
$$\mathcal{R}_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \hat{x}_i\|^2 < \|\mathbf{x} - \hat{x}_j\|^2, \forall j \neq i \right\}$$
 - ii) O vetor \hat{x}_i é o centroide da região \mathcal{R}_i , ou seja,

$$\hat{x}_i = \frac{1}{P(\mathbf{x} \in \mathcal{R}_i)} \int \dots \int_{\mathcal{R}_i} \mathbf{X} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$$



- No projeto de quantizadores vetoriais ótimos, inicia-se com um conjunto de regiões de quantização.
- Em seguida, obtém-se os vetores de quantização ótimos para essas regiões (critério ii)).
- O espaço obtido é re-particionado (critério i)) e os passos anteriores são iterativamente recalculados até que a distorção D se torne suficientemente pequena.
- Algoritmos como o LBG e k-means são usados com esse objetivo e encontram aplicações em multimídia e aprendizado de máquinas.



- Para um quantizador vetorial com n fixo, a taxa por vetor de amostras é dada por

$$B = \log_2 K \text{ bits/vetor}$$

- A taxa por amostra é descrita por

$$R = \frac{B}{n} = \frac{\log_2 K}{n} \text{ bits/amostra}$$



Exemplo 6

Considere uma sequência de 20 amostras de um sinal de voz que é amostrada a taxa de Nyquist usando um quantizador escalar. O número de bits por amostra é maior ou igual a 1.

- a) Calcule a taxa de um codificador PCM (ITU G.711) que usa um quantizador escalar com 8 bits / amostra.
- b) Calcule a taxa de um quantizador vetorial que emprega 10 bits / vetor.



Solução:

a) A taxa do sistema PCM é dada por

$$\begin{aligned} R &= 8 \text{ bits/amostra} \\ &= l_k f_s = 8 \times 8000 = 64 \text{ kbps} \end{aligned}$$

b) A taxa do quantizador vetorial é descrita por

$$\begin{aligned} R &= \frac{\log_2 K}{n} = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ bits /amostra} \\ &= 0.5 \times 8000 = 4 \text{ kbps} \end{aligned}$$

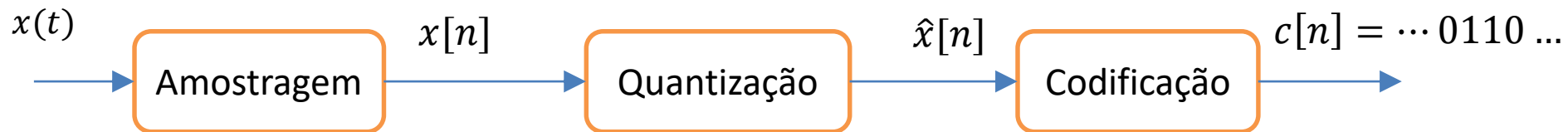


C. Codificação

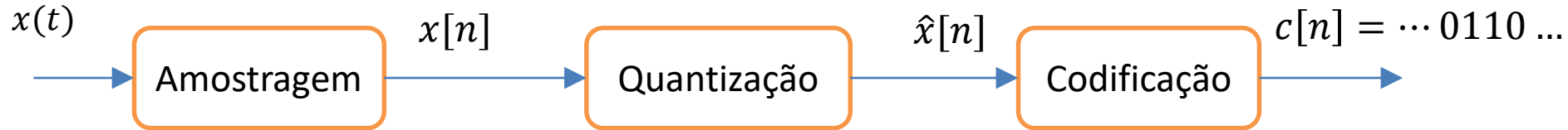
- Nesta seção, estuda-se diversas abordagens para transformar os bits resultantes do procedimento de quantização em palavras-código binárias.
- Inicialmente, esquemas de codificação de formas de onda, que são concebidos para reproduzir as formas de onda depois da quantização com a menor distorção possível, são examinados.
- Dentre os esquemas de codificação de formas de onda incluem-se Pulse Code Modulation (PCM), Differential PCM (DPCM) e modulação delta.
- Em seguida, discute-se outros esquemas de codificação como codificação de Gray e codificação em linha.

PCM

- PCM é o esquema de codificação de formas de onda mais simples e consiste no uso de um amostrador, um quantizador e um codificador.



- Sistemas PCM se baseiam nas seguintes suposições:
 - i) o sinal é limitado em faixa a W Hz e pode ser reconstruído a partir de suas amostras se amostrado a $f_s \geq 2W$.
 - ii) o sinal tem amplitude finita.
 - iii) a quantização é realizada com um número grande de níveis que são potências de 2, ou seja, $N = 2^l$, em que l é um inteiro.



- Os valores amostrados do sinal $x[n]$ são aplicados a um quantizador escalar.
- O quantizador escalar pode ter níveis uniformes (PCM uniforme) ou não uniformes (PCM não uniforme).
- A saída do quantizador, $\hat{x}[n]$, é então codificada em uma sequência binária de comprimento l bits.



PCM uniforme

- Em PCM uniforme, supõe-se que o quantizador é escalar uniforme com uma faixa de valores $[-x_{max}, +x_{max}]$.
- O comprimento da região de quantização ou resolução é dado por

$$\Delta = \frac{2x_{max}}{N} = \frac{x_{max}}{2^{l-1}}$$

- Os valores quantizados são escolhidos como os pontos médios das regiões de quantização.
- Logo, o erro de quantização é descrito como uma variável aleatória uniforme e dado por

$$e = x - Q(x),$$

em que $e \in \left(-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}\right]$

- Em aplicações PCM (ITU G.711), o número de níveis N é alto e as variações do sinal $x[n]$ são pequenas. Logo, o valor de Δ é pequeno.
- Nessas condições, em cada região de quantização o erro de quantização pode ser aproximado como uma variável aleatória uniforme dada por

$$p_e(E) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} \leq E \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- A distorção introduzida pela quantização, conhecida como ruído de quantização, é descrita por

$$\begin{aligned} P_q = E[e^2] &= E \left[(x - Q(x))^2 \right] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} E^2 p_e(E) dE \\ &= \frac{1}{\Delta} \frac{E^3}{3} \Bigg|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{3\Delta} \left(\frac{\Delta^3}{8} + \frac{\Delta^3}{8} \right) = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{max}^2}{3N^2} = \frac{x_{max}^2}{3.4^l}, \end{aligned}$$

em que l é o número de bits por amostra.



- A SQNR é então descrita por

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{P_x 3N^2}{x_{max}^2} = \frac{P_x 3 \cdot 4^l}{x_{max}^2},$$

em que P_x é a potência de $x(t)$ calculada por

$$P_x = R_x(\tau) \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 p_x(X) dX,$$

em que x_{max} é o valor máximo de $x(t)$ e $P_x = E[x^2(t)] \leq x_{max}^2$.

- Expressando-se SQNR em dB, obtém-se

$$SQNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{x_{max}^2} + 6l + 4,8,$$

em que cada bit extra em l aumenta a SQNR em 6 dB.



- Considere os requisitos de largura de faixa de um sistema PCM supondo-se um sinal limitado em faixa a W Hz e amostrado a $f_s = 2W$ amostras/s.
- Para cada amostra de um sinal PCM são usados l bits, resultando em um taxa de

$$R = lf_s \text{ bits/ s}$$

- A largura de faixa mínima requerida para transmissão de R bits/s é $\frac{R}{2}$ Hz. Logo, a largura de faixa mínima requerida para um sistema PCM é

$$B_{PCM} = \frac{lf_s}{2} = lW \text{ Hz,}$$

o que mostra que PCM expande a largura de faixa W por um fator l .



Exemplo 7

Considere um sinal $x(t)$ que é uniformemente distribuído em $[-1,1]$ quando PCM uniforme com $N = 256$ níveis é usado. A largura de faixa deste sinal é igual a $W = 3,4$ kHz.

- a) Calcule a SQNR para esse sinal.
- b) Calcule a largura de faixa mínima requerida.



Solução:

a) A potência do sinal é dada por

$$P_x = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} X^2 dX = \frac{X^3}{6} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}$$

Usando $x_{max} = 1$ e $l = \log_2 N = \log_2 256 = 8$ bits, tem-se

$$SQNR = \frac{P_x 3.4^l}{x_{max}^2} = 2^{16} = 32000$$

e

$$SQNR_{dB} = 10 \log_{10} SQNR = 48,16 \text{ dB}$$

b) A largura de faixa mínima requerida é

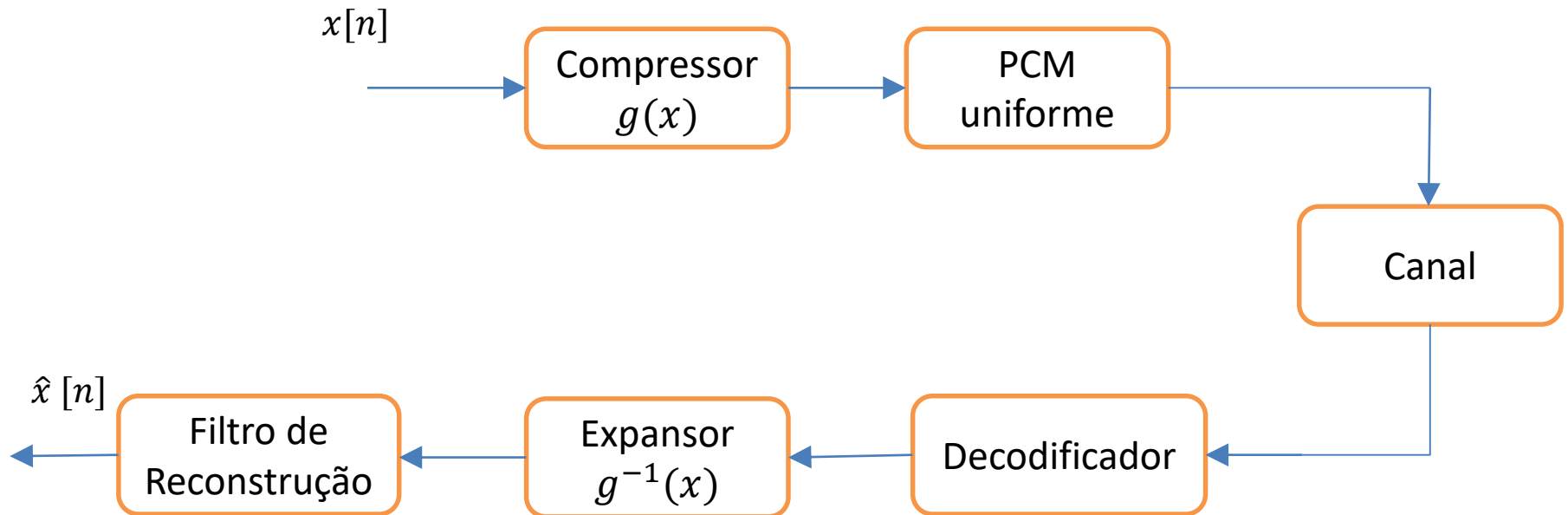
$$B_{PCM} = lW = 8 \times 3,4 \text{ kHz} = 27,2 \text{ kHz}$$



PCM não uniforme

- Quando os sinais têm uma distribuição estatística não uniforme é melhor usar mais regiões de quantização para amplitudes com maior probabilidade.
- Neste caso, projeta-se um quantizador com mais regiões de quantização cobrindo amplitudes com maior probabilidade.
- O quantizador resultante será um quantizador não uniforme com regiões de quantização de tamanhos variados.
- A abordagem usual em quantização não uniforme é aplicar as amostras a um dispositivo compressor que as comprime e usa quantização uniforme.
- No receptor, a operação inversa do compressor é realizada.

- No diagrama em blocos abaixo, é mostrado um sistema PCM.





- Há dois tipos de compressores: o μ -law usado na América do Norte e o A-law usado nos demais países.
- O compressor μ -law emprega a seguinte função logarítmica:

$$g(x) = \frac{\log(1 + \mu|x|)}{\log(1 + \mu)} \cdot \text{sgn}(x),$$

em que $|x| \leq 1$ e μ controlam a quantidade de compressão e expansão.

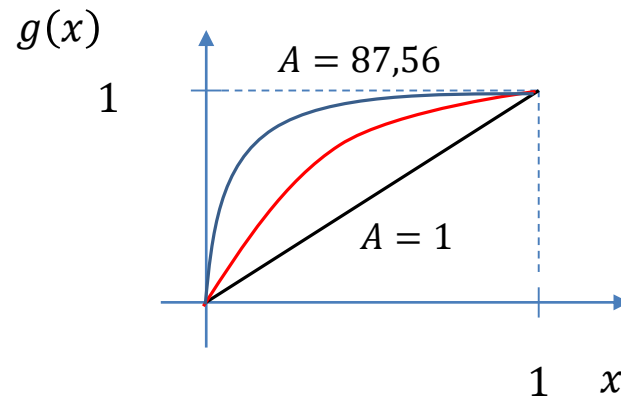
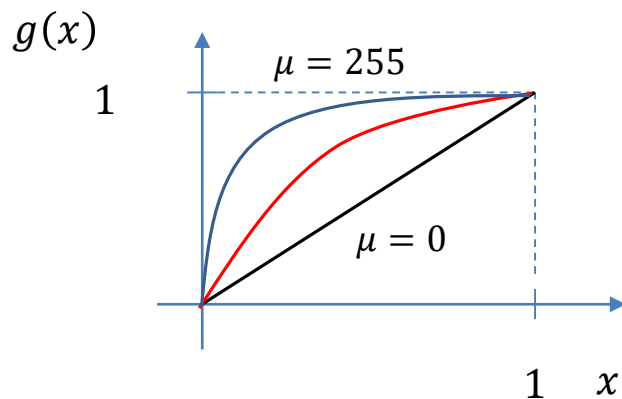
- Os sistemas PCM empregam $\mu = 255$ seguidos de um quantizador uniforme com 8 bits/ amostra, que melhora o desempenho em 24 dB.

- O compressor A -law emprega a seguinte função logarítmica:

$$g(x) = \frac{1 + \log A|x|}{1 + \log A} \cdot \text{sgn}(x),$$

em que $A = 87.56$ produz um desempenho comparável ao do compressor μ -law com $\mu = 255$.

- Ilustrações dos compressores são mostradas abaixo.





Exemplo 8

Considere um sinal descrito por

$$x(t) = \sin(t)$$

Desenvolva uma rotina em Matlab para calcular um sinal codificado e sua SQNR por PCM uniforme com 8 e 16 bits.

Esboce o sinal original e codificado.



Solução: a)

```
function [sqnr,a_quan,code]= u_pcm(a,n)
```

```
amax=max(abs(a));
```

```
a_quan=a/amax;
```

```
b_quan=a_quan;
```

```
d=2/n;
```

```
q=d.*[0:n-1];
```

```
q=q-((n-1)/2)*d;
```

```
for i=1:n
```

```
    a_quan(find((q(i)-d/2 <= a_quan) & (a_quan <= q(i)+d/2))) = q(i).*ones(1,length(find((q(i)-d/2 <= a_quan) & (a_quan <= q(i)+d/2))));
```

```
    b_quan(find(a_quan==q(i)))=(i-1).*ones(1,length(find( a_quan==q(i) )));
```

```
end
```

```
a_quan=a_quan*amax;
```

```
nu=ceil(log2(n));
```

```
code=zeros(length(a),nu);
```

```
for i=1:length(a)
```

```
    for j=nu:-1:0
```

```
        if ( fix(b_quan(i)/(2^j)) == 1)
```

```
            code(i,(nu-j)) = 1;
```

```
            b_quan(i) = b_quan(i)-2^j;
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
sqnr=20*log10(norm(a)/norm(a-a_quan));
```




```
clear all;  
t = [0:0.1:10];  
x = sin(t);  
[sqnr8,x_quan8,code8]=u_pcm(x,8);  
[sqnr16,x_quan16,code16]=u_pcm(x,16);  
sqnr8  
sqnr16  
plot(t,x,'-',t,x_quan8,'-.',t,  
x_quan16,'-.',t,zeros(1,length(t)));
```

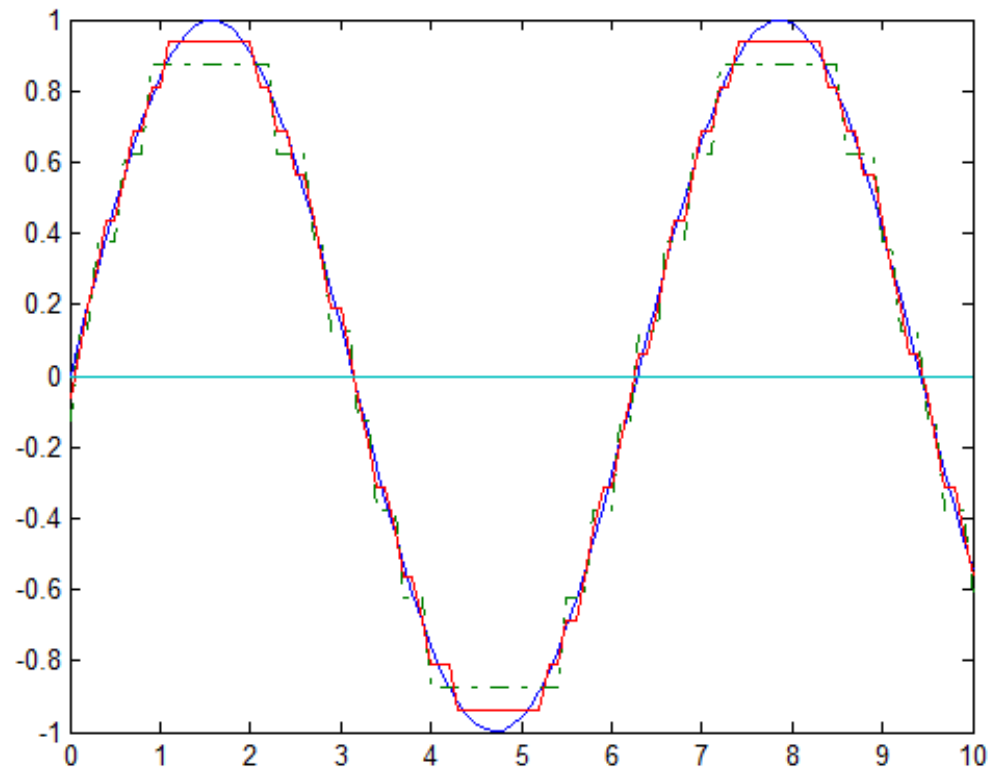
```
>> ex4
```

```
sqnr8 =
```

```
18.8532
```

```
sqnr16 =
```

```
25.1153
```

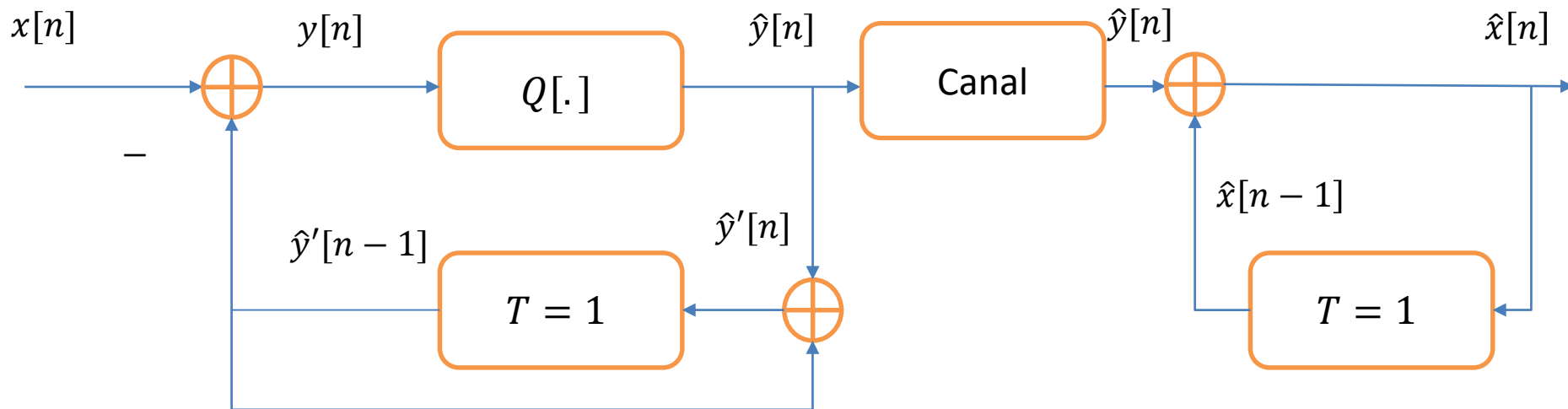




DPCM

- Quando as amostras de um sinal $x[n]$ são correlacionadas, essa correlação pode ser explorada para melhorar o desempenho do sistema.
- Em sistemas DPCM, inventados por Cutler do Bell Labs em 1950, as diferenças entre amostras adjacentes são quantizadas.
- Em particular, quando a correlação entre amostras adjacentes é alta as diferenças são pequenas e menos bits podem ser usados na quantização.
- Logo, sistemas DPCM podem superar em desempenho sistemas PCM com o mesmo número de bits e, para o mesmo desempenho, requerer menos bits.
- Variações de sistemas DPCM incluem o adaptive DPCM (ADPCM), que usa um fator de escala adaptativo e foi incluído no padrão ITU G. 716.

- Um diagrama em bloco de um sistema DPCM é mostrado abaixo.



- Em um sistema DPCM, a entrada para o quantizador é descrita por

$$y[n] = x[n] - \hat{y}'[n - 1]$$

em que $x[n]$ é o sinal de entrada.



- A saída do quantizador é descrita por

$$\hat{y}[n] = Q[y[n]]$$

- Pode-se então definir a relação

$$\hat{y}'[n] = \hat{y}[n] + \hat{y}'[n - 1],$$

que produz o erro de quantização

$$\begin{aligned} e_q[n] &= \hat{y}[n] - y[n] = \hat{y}[n] - (x[n] - \hat{y}'[n - 1]) \\ &= \hat{y}[n] - x[n] + \hat{y}'[n - 1] \\ &= \hat{y}'[n] - x[n] \end{aligned}$$



- No receptor, tem-se

$$\hat{x}[n] = \hat{y}[n] + \hat{x}[n - 1]$$

- Comparando-se as equações para $\hat{y}'[n]$ e $\hat{x}[n]$, nota-se que se fizermos $\hat{x}[-1] = \hat{y}'[-1] = 0$ para $n = 0$ então para $n \neq 0$ tem-se

$$\hat{y}'[n] = \hat{x}[n]$$

e

$$\begin{aligned} e_q[n] &= \hat{y}[n] - y[n] \\ &= \hat{x}[n] - x[n], \end{aligned}$$

que mostra que o erro de quantização entre $\hat{x}[n]$ e $x[n]$ é o mesmo que o erro de quantização entre $\hat{y}[n]$ e $y[n]$.

- Como as variações em $y[n]$ são menores do que as variações em $x[n]$, $y[n]$ pode ser quantizado com menos bits.



Exemplo 8

Um sinal de voz é limitado em faixa a $W = 3\text{kHz}$ e amostrado a uma taxa de $f_s = 8\text{ kHz}$.

Para obter qualidades de voz comparáveis, sistemas PCM requerem 8 bits/amostra e sistemas DPCM requerem 4bits/amostra.

Determine as taxas de bits necessárias para transmitir os sinais codificados com PCM e DPCM.



Solução:

Para sinais PCM, tem-se

$$R = l f_s = 8 \times 8000 = 64 \text{ kbps}$$

Para sinais DPCM, tem-se

$$R = l_d f_s = 4 \times 8000 = 32 \text{ kbps}$$

Exemplo 9

Considere um problema de transmissão da imagem Lena usando DPCM com 16 bits



A imagem original pode ser quantizada com 4, 8 ou 16 bits

Com 4 bits e preto e branco

Reconstruction images QP=4



Com 8 bits e preto e branco

Reconstruction images QP=8



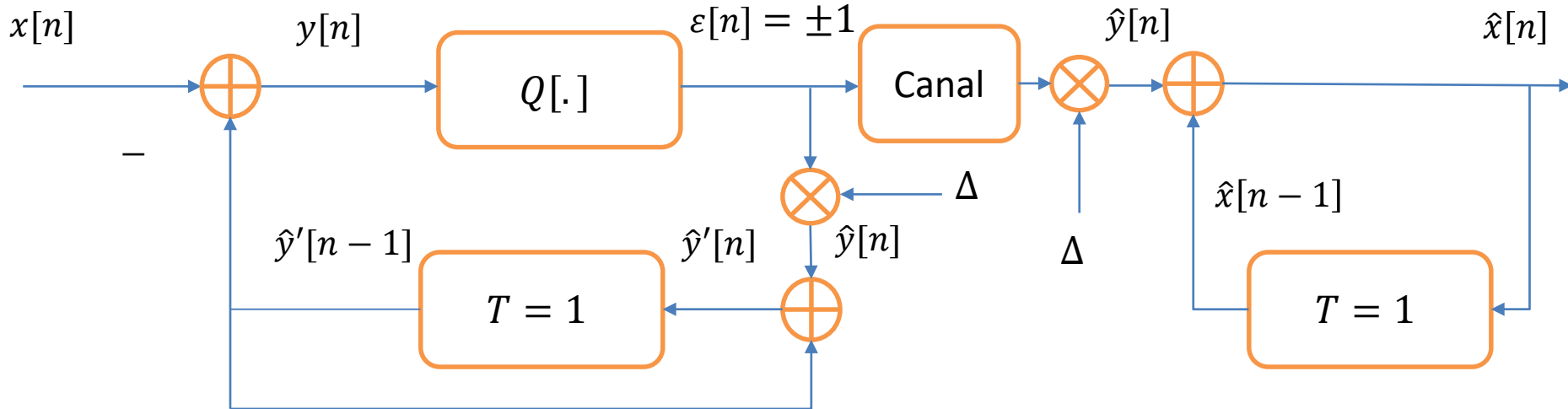


Com 16 bits e colorida



Modulação delta

- A modulação delta (DM) é uma versão simplificada do DPCM em que o quantizador emprega 1 bit (2 níveis) com magnitudes $\pm \Delta$.



- Em DM, apenas 1 bit por amostra é usado, o que resulta em um ruído de quantização grande caso a faixa dinâmica de $y[n]$ seja pequena.



- Para que a faixa dinâmica de $y[n]$ seja pequena, $x[n]$ e $x[n - 1]$ precisam ser altamente correlacionados.
- Isto requer amostragem a uma taxa muito acima da taxa de Nyquist.
- Devido ao uso de quantização com 1 bit a taxa em bits/s requerida para transmitir a forma de onda (ex: 24kbps) é menor do que a taxa de PCM.
- A maior vantagem de DM é a sua estrutura simples, onde o transmissor calcula

$$y[n] = x[n] - \hat{y}'[n - 1]$$

e

$$\varepsilon[n] = \hat{y}[n] = Q[y[n]]$$



- Pode-se então definir

$$\hat{y}'[n] = \hat{y}[n] + \hat{y}[n - 1] = \varepsilon[n]\Delta + \hat{y}[n - 1],$$

o que produz o erro de quantização

$$\begin{aligned} e_q[n] &= \hat{y}[n] - y[n] = \hat{y}[n] - (x[n] - \hat{y}'[n - 1]) = \pm 1 \\ &= \hat{y}[n] - x[n] - \hat{y}[n - 1] \\ &= \hat{y}'[n] - x[n] \end{aligned}$$

- No receptor, tem-se

$$\hat{x}[n] = \hat{y}[n] + \hat{x}[n - 1]$$

- Resolvendo a equação acima para $\hat{x}[n]$ e supondo-se condições iniciais iguais a zero, obtém-se

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=0}^n \hat{y}[i],$$

o que requer o acúmulo de $\hat{y}[n]$



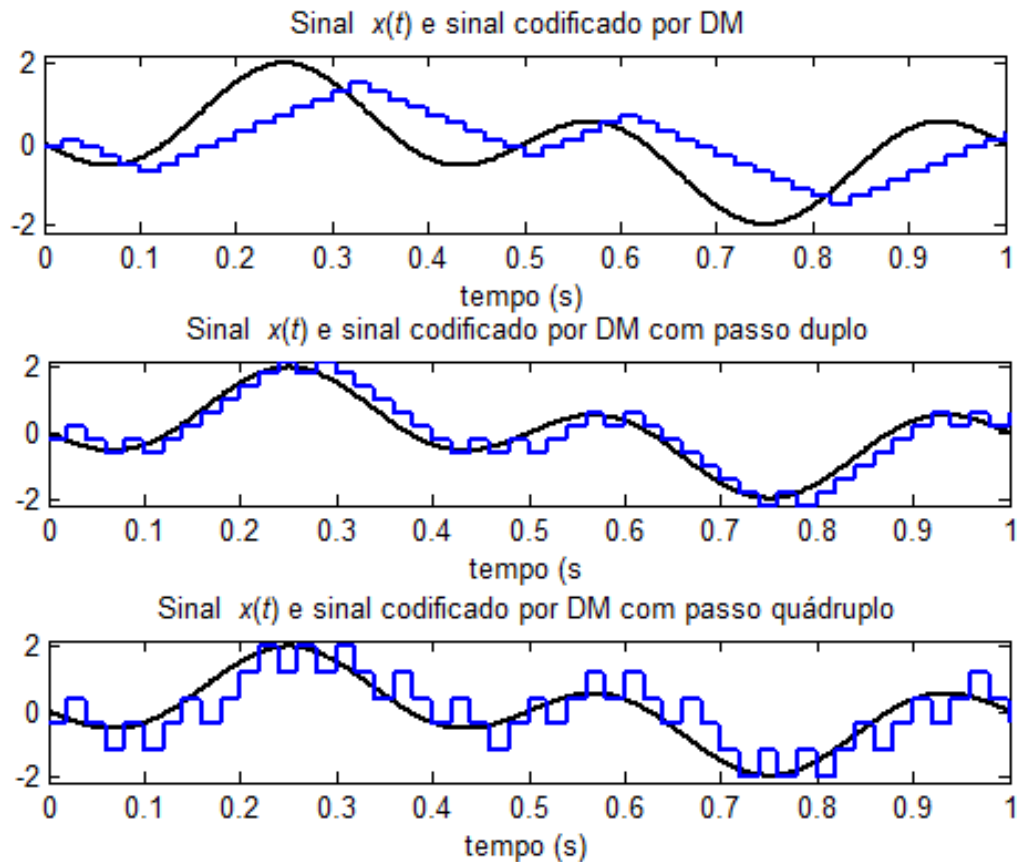
- O tamanho do passo Δ é muito importante no projeto de sistemas DM porque eles devem rastrear o comportamento das formas de onda.
- Como Δ deve ser ajustados de acordo com a forma de onda é útil ajustar de forma adaptativa Δ com base em $\hat{y}[n] = \varepsilon[n] = \pm 1$ em instantes sucessivos, resultando em

$$\Delta[n] = \Delta[n - 1]K^{\varepsilon[n] \times \varepsilon[n-1]},$$

em que $K > 1$.

- Essa abordagem é conhecida como DM adaptativo e tem desempenho 5-10 dB melhor do que sistemas DM convencionais para sinais de voz.

- Ilustração de DM.





Exemplo 10

Considere um sinal descrito por

$$x(t) = \text{sen}(2\pi t)$$

Desenvolva uma rotina em Matlab para implementar DM com passos $\Delta = 0,1$ e $0,2$

Compare com o sinal original.



Solução:

```
function s_DMout = deltamod(sig_in,Delta,td,ts)
```

```
if ( rem(ts/td,1) ==0 )
```

```
nfac = round(ts/td);
```

```
p_zoh = ones(1,nfac);
```

```
s_down = downsample(sig_in,nfac);
```

```
Num_it = length(s_down);
```

```
s_DMout(1) = - Delta/2;
```

```
for k= 2:Num_it
```

```
xvar= s_DMout(k-1) ;
```

```
s_DMout(k) =xvar+Delta*sign(s_down(k-1)-xvar);
```

```
end
```

```
s_DMout =kron(s_DMout,p_zoh);
```

```
else
```

```
warning ( ' Error ! t s / td is not an integer ! ' ) ;
```

```
s_DMout= [];
```

```
end
```

```
end
```



% Exemplo de modulação delta

clear;

td= 0.002; % taxa de amostragem 500 Hz

t = [0:td:2]; % Intervalo de tempo de 2 s

xsig = sin(2*pi*t); % 1 Hz

Lsig= length(xsig) ;

ts = 0.02 ; % nova taxa de amostragem = 50 Hz

Deltal = 0.1; % passo DM

s_DMoutl =deltamod(xsig,Deltal,td,ts); % sinal DM

% Plotar o sinal original e o sinal DM

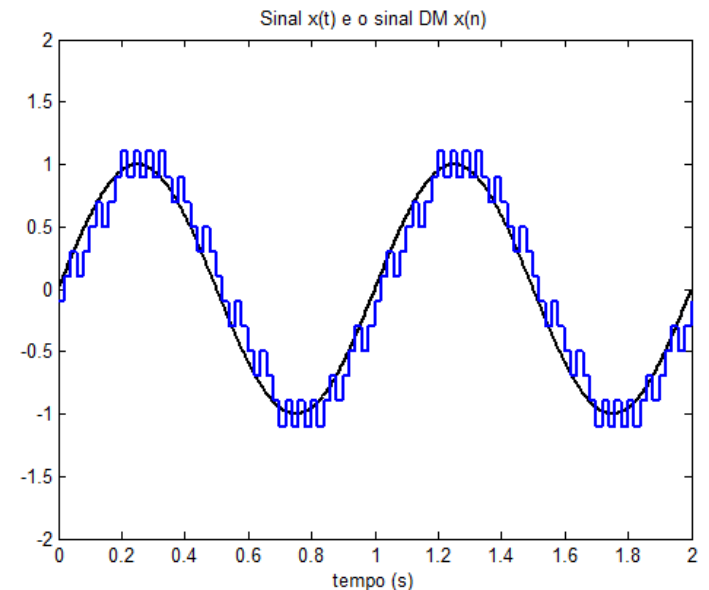
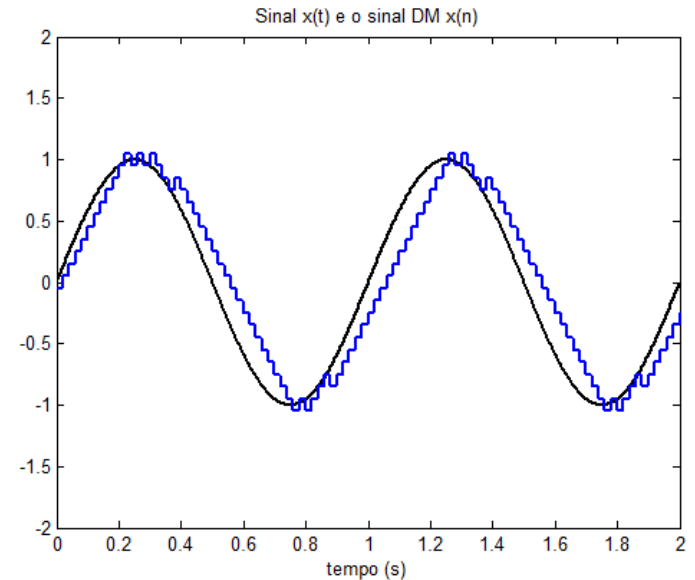
sfigl =plot(t,xsig,'k',t,s_DMoutl(1:Lsig),'b');

set(sfigl,'Linewidth',2);

title(' Sinal x(t) e o sinal DM x(n)');

xlabel('tempo (s)');

axis([0 2 -2 2]);





Códigos binários

- No processo de codificação, a sequência de bits pode ser associada a diferentes valores de quantização.
- Com $N = 2^l$ níveis de quantização, l bits são suficientes para codificar uma amostra de sinal.
- A alocação de bits aos níveis de quantização pode ser feita de várias maneiras.
- Alocações mais simples e intuitivas são usadas para quantização escalar, enquanto que alocações mais elaboradas são usadas em quantização vetorial.



- Em quantização escalar, pode-se associar os valores de 0 a $N - 1$ para diferentes níveis de quantização.
- Essa abordagem é conhecida como codificação binária natural (NBC de Natural Binary Coding)
- Logo, pode-se designar palavras-código binárias para os níveis de 0 a $N - 1$, em que
 - l zeros ($\underbrace{00 \dots 0}_l$) são usados para o nível mais baixo de quantização,
 - $l - 1$ zeros ($\underbrace{0 \dots 01}_l$) são usados para o 2o. nível mais baixo de quantização.
 - ⋮
 - l 1s ($\underbrace{11 \dots 1}_l$) são usados pra o nível mais alto de quantização .



- Outra abordagem para codificação é codificar os níveis de quantização de modo que níveis adjacentes sejam diferentes em apenas 1 bit.
- Essa abordagem é conhecida como codificação de Gray e é eficaz para lidar com erros.
- A codificação de Gray é muito usada em modulação digital e problemas de transmissão e recepção de sinais.

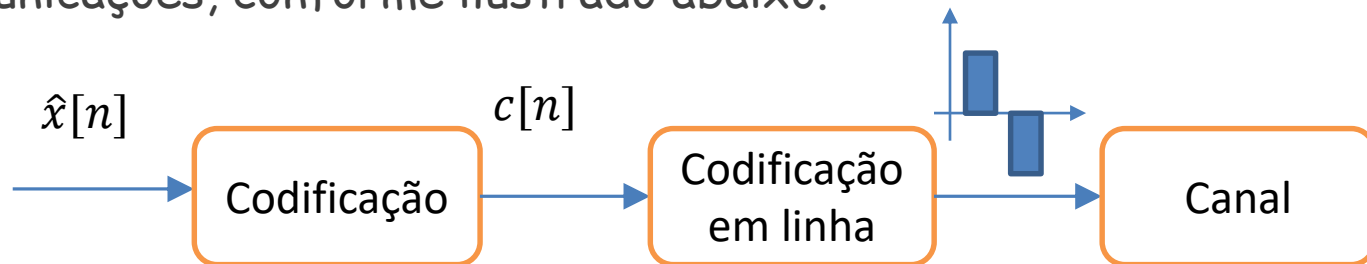


- Um exemplo de codificação de Gray e NBC com 16 níveis é mostrado ao lado.

Quantização	Nível	Código NBC	Código de Gray
\hat{x}_1	0	0000	0000
\hat{x}_2	1	0001	0010
\hat{x}_3	2	0010	0011
\hat{x}_4	3	0011	0001
\hat{x}_5	4	0100	0101
\hat{x}_6	5	0101	0100
\hat{x}_7	6	0110	0110
\hat{x}_8	7	0111	0111
\hat{x}_9	8	1000	1111
\hat{x}_{10}	9	1001	1110
\hat{x}_{11}	10	1010	1100
\hat{x}_{12}	11	1011	1101
\hat{x}_{13}	12	1100	1001
\hat{x}_{14}	13	1101	1000
\hat{x}_{15}	14	1110	1010
\hat{x}_{16}	15	1111	1011

Codificação de linha

- Depois de codificar o sinal digital em uma palavra-código binária, emprega-se codificação de linha para convertê-la em formas de onda.
- As formas de onda são transmitidas através de um canal de comunicações, conforme ilustrado abaixo.

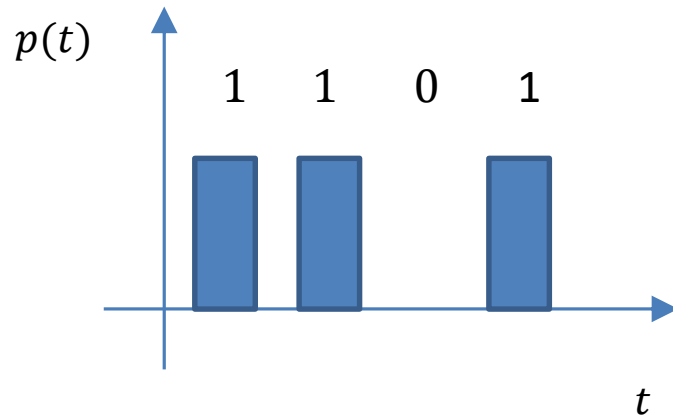


- Há varias formas de codificação de linha:
 - Sinalização on-off
 - Sinalização polar
 - Sinalização bipolar
 - Sinalização Manchester



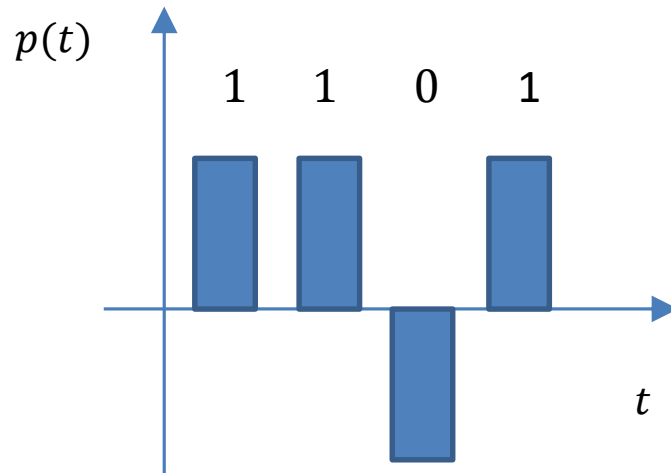
i) Sinalização on-off:

Neste caso, um dígito 1 é transmitido por um pulso $p(t)$ e um dígito 0 é transmitido por uma ausência de pulso.



ii) Sinalização polar:

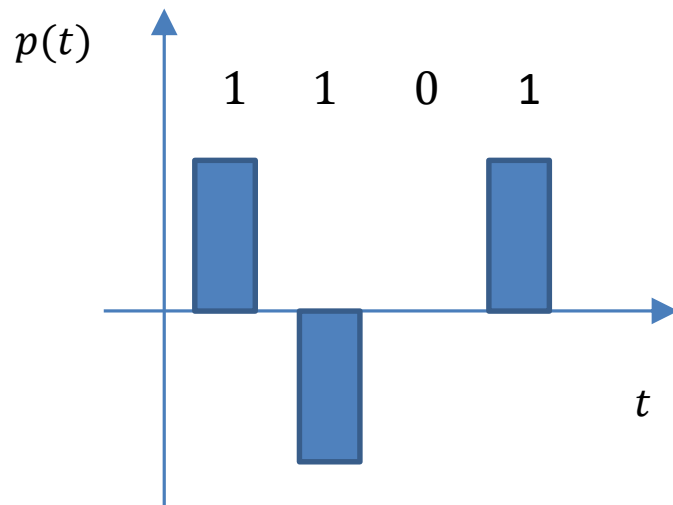
Neste caso, um dígito 1 é transmitido por um pulso $p(t)$ e um dígito 0 é transmitido por um pulso $-p(t)$.



A sinalização polar é usada em redes de comunicações em curtas distâncias.

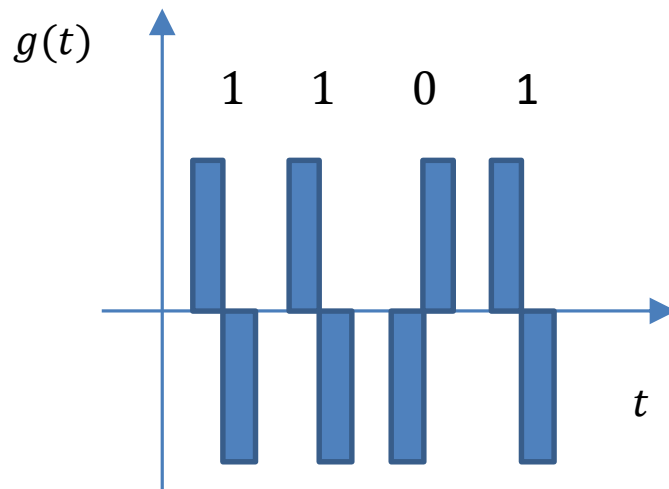
iii) Sinalização bipolar:

Neste caso, um dígito 1 é transmitido por um pulso $p(t)$ ou $-p(t)$ dependendo do 1 prévio e um dígito 0 é transmitido pela ausência de um pulso.



iv) Sinalização Manchester:

Neste caso, um dígito 1 é transmitido por um pulso $g(t)$ seguido de um pulso $-g(t)$ e um dígito 0 é transmitido quando o sinal desses pulsos é invertido.



Na sinalização Manchester os pulsos têm metade da duração das sinalizações anteriores.



- Em geral, um código de linha pode ser expresso por

$$z(t) = \sum_{n=-N}^N a_n p(t - nT_b),$$

em que a_n varia de acordo com a sinalização, $p(t)$ é o pulso e T_b é a duração do bit.

- A transformada de Fourier de $z(t)$ é descrita por

$$Z(f) = \sum_{n=-N}^N a_n P(f) e^{-j2\pi f n T_b} = P(f) \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j2\pi f n T_b}$$



- A densidade espectral de potência é dada por

$$\begin{aligned} S_z(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |P(f)|^2 E \left[\left| \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j2\pi f n T_b} \right|^2 \right] \right] \\ &= |P(f)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E[a_n a_m] e^{j2\pi f(m-n)T_b} \right] \\ &= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R[k] e^{jk2\pi f T_b} \end{aligned}$$

em que $R[k] = E[a_n a_{n+k}]$ é a função autocorrelação.



Discussão

- Códigos de linha do tipo non-return-to-zero (NRZ) como sinalização bipolar e Manchester fazem melhor uso da largura de faixa do que esquemas return-to-zero (RZ) como sinalização on-off.
- Em particular, a sinalização Manchester tem a vantagem de suprimir o componente DC e não possui componentes de baixa frequência significativos.



Exemplo 11

Considere um sistema com sinalização on-off com pulsos retangulares em que $P(a_n = A) = P(a_n = 0) = \frac{1}{2}$.

- a) Escreva a representação do sinal.
- b) Calcule a função autocorrelação $R[k]$.
- c) Determine a transformada de Fourier do sinal.
- d) Obtenha a densidade espectral de potência do sinal.



Solução;

a) O sinal pode ser escrito como

$$z(t) = \sum_{n=-N}^N A \text{rect}(t - nT_b)$$

b) A função autocorrelação é descrita por

$$R[k] = E[a_n a_{n+k}] = \sum_{i=1}^4 (a_n a_{n+k})_i p_i$$

Para $k = 0$, tem-se

$$R[0] = E[a_n a_n] = \sum_{i=1}^4 (a_n^2)_i p_i = (0)P(a_n = 0) + (A^2)P(a_n = A) = \frac{A^2}{2}$$

Para $k \neq 0$, tem-se

$$R[k] = E[a_n a_{n+k}] = \sum_{i=1}^4 (a_n a_{n+k})_i p_i = 3(0) \left(\frac{1}{4}\right) + (A^2) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{A^2}{4}$$



c) A transformada de Fourier do sinal é dada por

$$\begin{aligned} Z(f) &= \mathfrak{F}\{z(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-N}^N \text{Arect}(t - nT_b)\right\} \\ &= AT_b \text{sinc}(fT_b) \end{aligned}$$

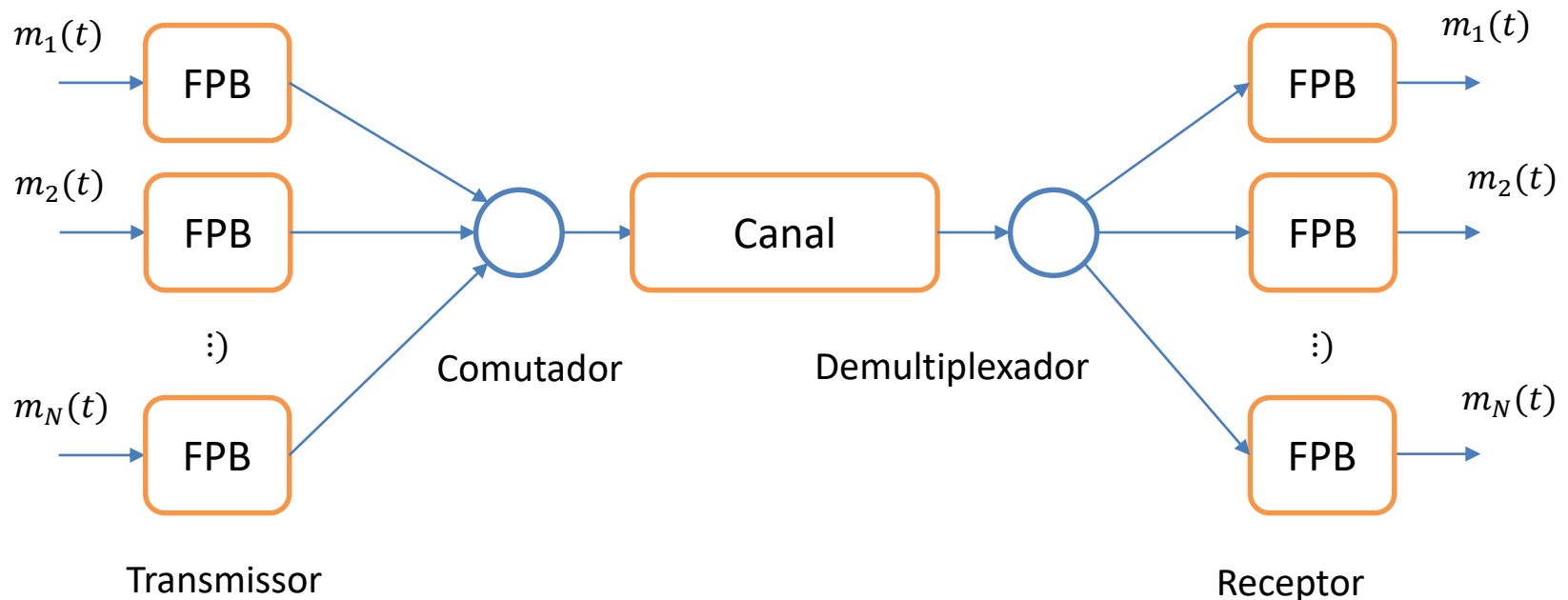
d) A densidade espectral de potência é descrita por

$$\begin{aligned} S_z(f) &= \frac{|AT_b \text{sinc}(fT_b)|^2}{T_b} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f T_b} \right] \\ &= \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(fT_b) \left[1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f T_b} \right] \\ &= \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(fT_b) \left[1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right] \\ &= \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(fT_b) \left[1 + \frac{\delta(f)}{T_b} \right] \end{aligned}$$

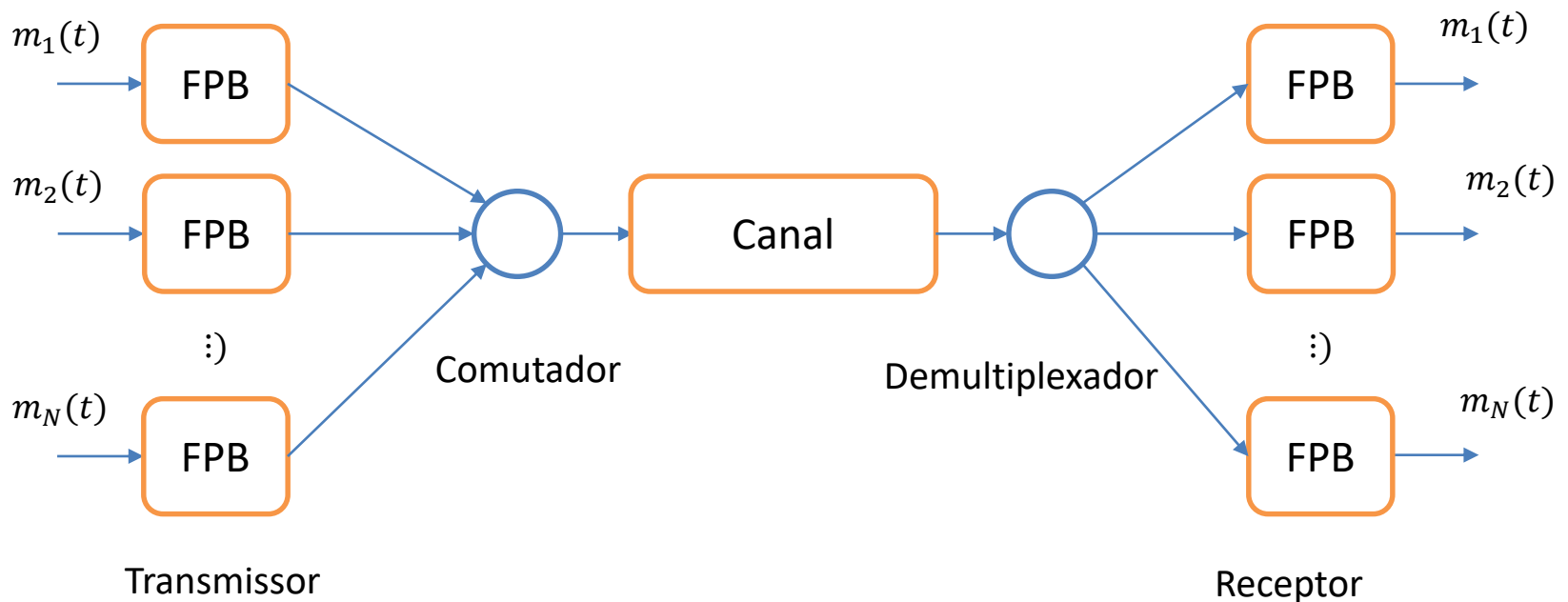
$\text{sinc}(fT_b) = 0 \text{ p/ } f = \frac{n}{T_b}, n \neq 0$

D. Aplicações

- Sistemas de multiplexação por divisão de tempo (TDM) são uma aplicação de técnicas de amostragem e de conversão analógico-digital.
- Sistemas TDM são usados para transmitir simultaneamente múltiplos sinais em um canal de comunicações, conforme o diagrama em blocos abaixo.



- Em um sistema TDM, cada mensagem é filtrada por um filtro passa-baixa (FPB), que remove frequências baixas para representação do sinal.
- As saídas dos filtros são aplicadas a um comutador que amostra os sinais a taxa de Nyquist ou múltiplas da taxa de Nyquist.
- As amostras são entrelaçadas e transmitidas e um sinal composto é transmitido pelo canal.





- No receptor, o sinal composto é demultiplexado usando um outro comutador que distribui os sinais para um banco de filtros passa-baixa para demodulação.
- O conceito de TDM é muito usado em telefonia fixa, telemetria e processamento de sinais.