Modelos Probabilísticos em Engenharia Elétrica

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br

VI. Processos estocásticos

- Neste capítulo, as noções básicas e os conceitos gerais necessários ao estudo de processos estocásticos são introduzidos.

- Exemplos de processos estocásticos específicos são discutidos bem como formas de caracterizá-los.

- Além disso, são estudados momentos e a especificação de processos estocásticos encontrados em casos práticos.

- São ainda discutidas as noções de independência estatística, descorrelação e ortogonalidade entre processos estocásticos.

- Em seguida, estuda-se processos Gaussianos, sua interação com sistemas lineares, a densidade espectral de potência e teoria das filas.

A. Definição de processos estocásticos

- Considere um mapeamento que associa a cada ponto-amostra $\omega \in \Omega$ uma função real de uma parâmetro t pertencente a um conjunto Υ.

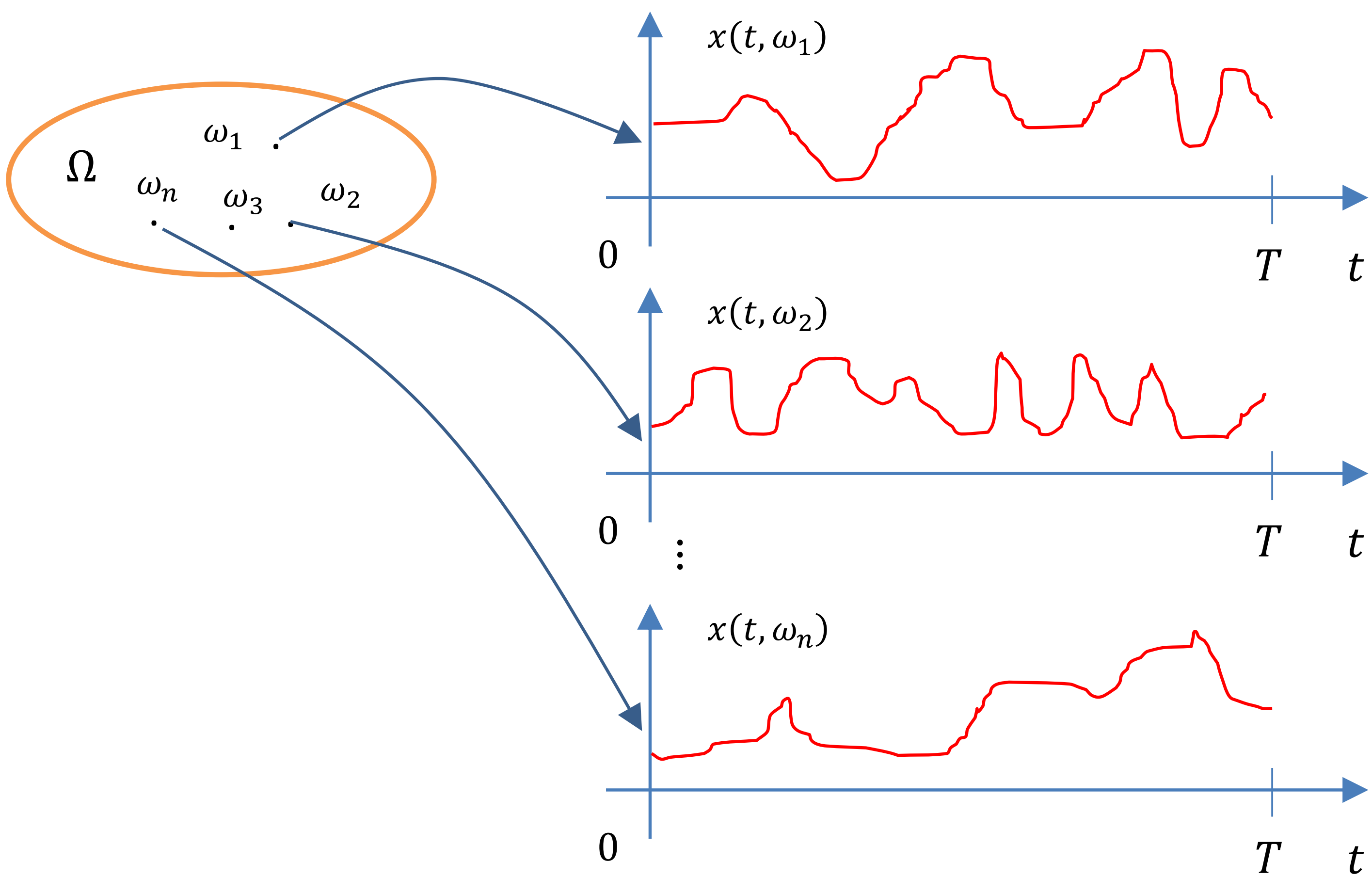
- Em geral, o parâmetro t está associado ao tempo.

- Desta maneira, cria-se uma família $\mathcal{F}$ de funções de t $(t \in \Upsilon)$. Este mapeamento denomina-se processo estocástico.

- Um processo estocástico é o mapeamento matematicamente definido por

$$\begin{aligned} x:\quad & \Omega \to \mathcal{F} \\ & \omega \to x(t,\omega), t \in \Upsilon \end{aligned}$$

- O mapeamento de x para o caso particular em que $\Upsilon = (0, T]$ é ilustrado pela figura abaixo.



- É importante observar que um processo estocástico nada mais é do que uma função de duas variáveis, ω e t, cujos domínios são Ω e $\Upsilon \in \mathbb{R}$.

- Pode-se também interpretar um processo estocástico como uma coleção de v.a.s

- É comum chamar cada função pertencente à família $\mathcal{F}$ por função amostra e o conjunto de todas as funções por ensemble.

Uma interpretação interessante é obtida ao se variar ou fixar ω ou t no processo estocástico $x(t, \omega)$:

i) Para ω e t variáveis -> uma família de funções amostra no tempo.

ii) Para ω fixo e t variável -> uma única função amostra no tempo.

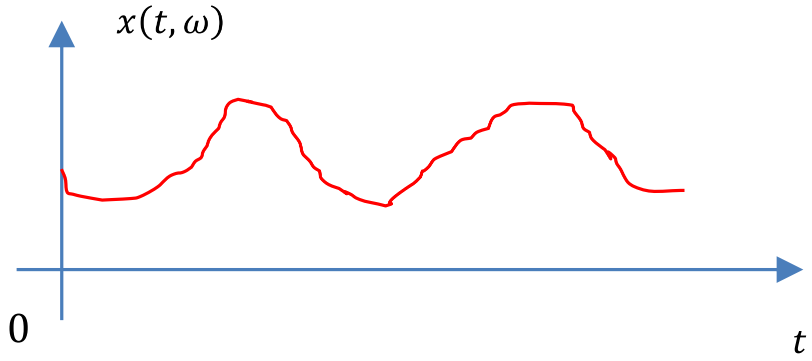
iii) Para ω variável e t fixo -> uma v.a.

iv) Para ω variável ou $t_1, t_2, \dots, t_n$ fixos -> um vetor aleatório $x(t) = \begin{bmatrix} x(t_1, \omega) \\ x(t_2, \omega) \\ \vdots \\ x(t_n, \omega) \end{bmatrix}$

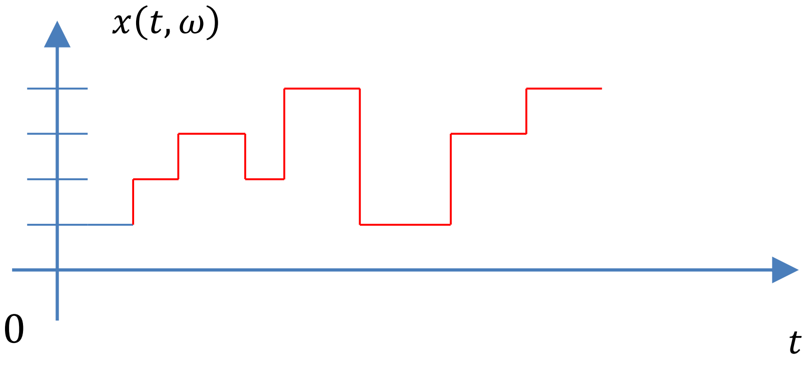
v) Para ω e t fixos -> um número real.

B. Classificação de processos estocásticos

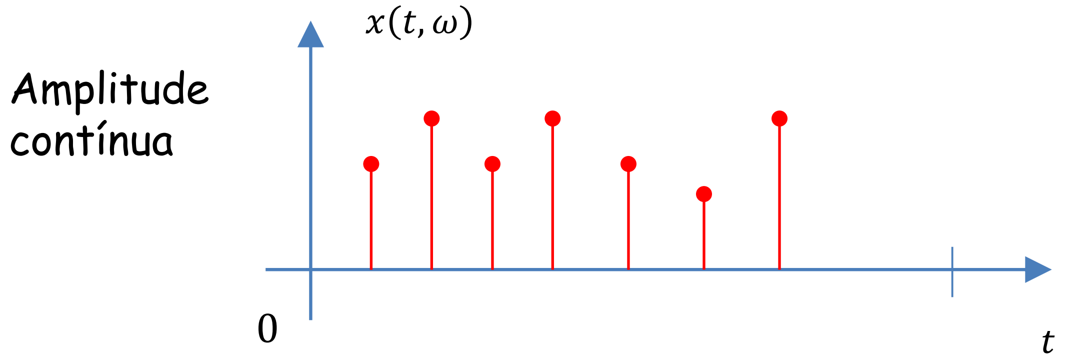
i) Processo estocástico contínuo de parâmetros contínuos.



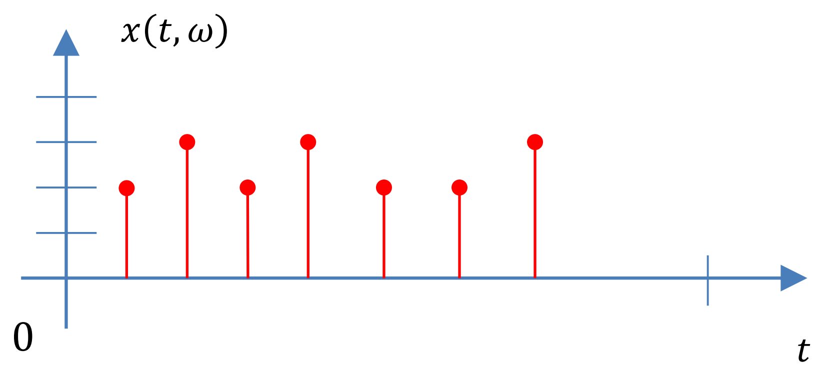
ii) Processo estocástico discreto de parâmetro contínuo



iii) Processo estocástico contínuo de parâmetro discreto



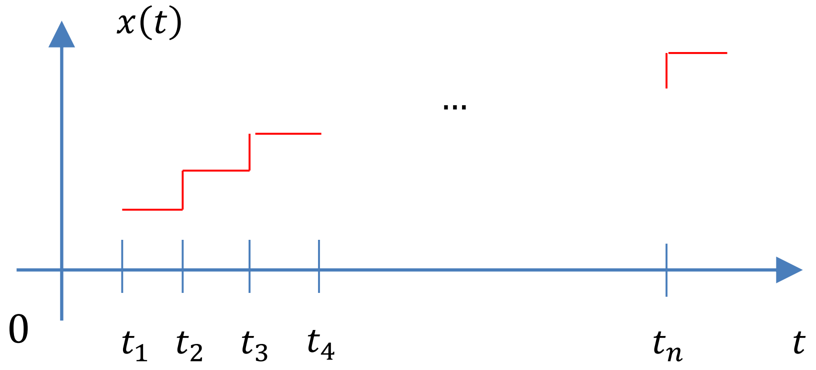
iv) Processo estocástico discreto de parâmetro discreto



C. Exemplos de processos estocásticos

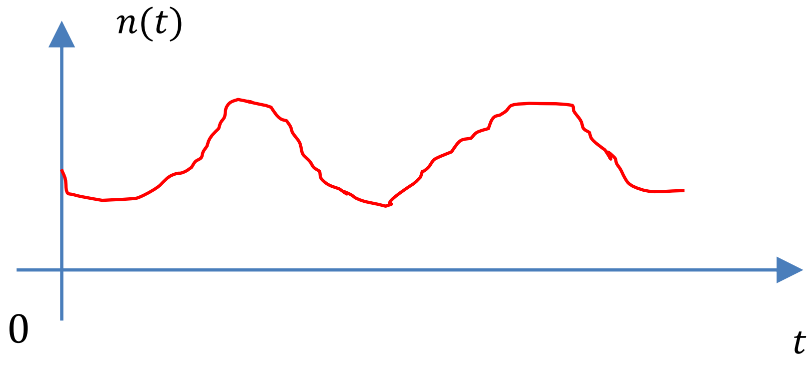
i) Chamadas telefônicas

Número de chamadas



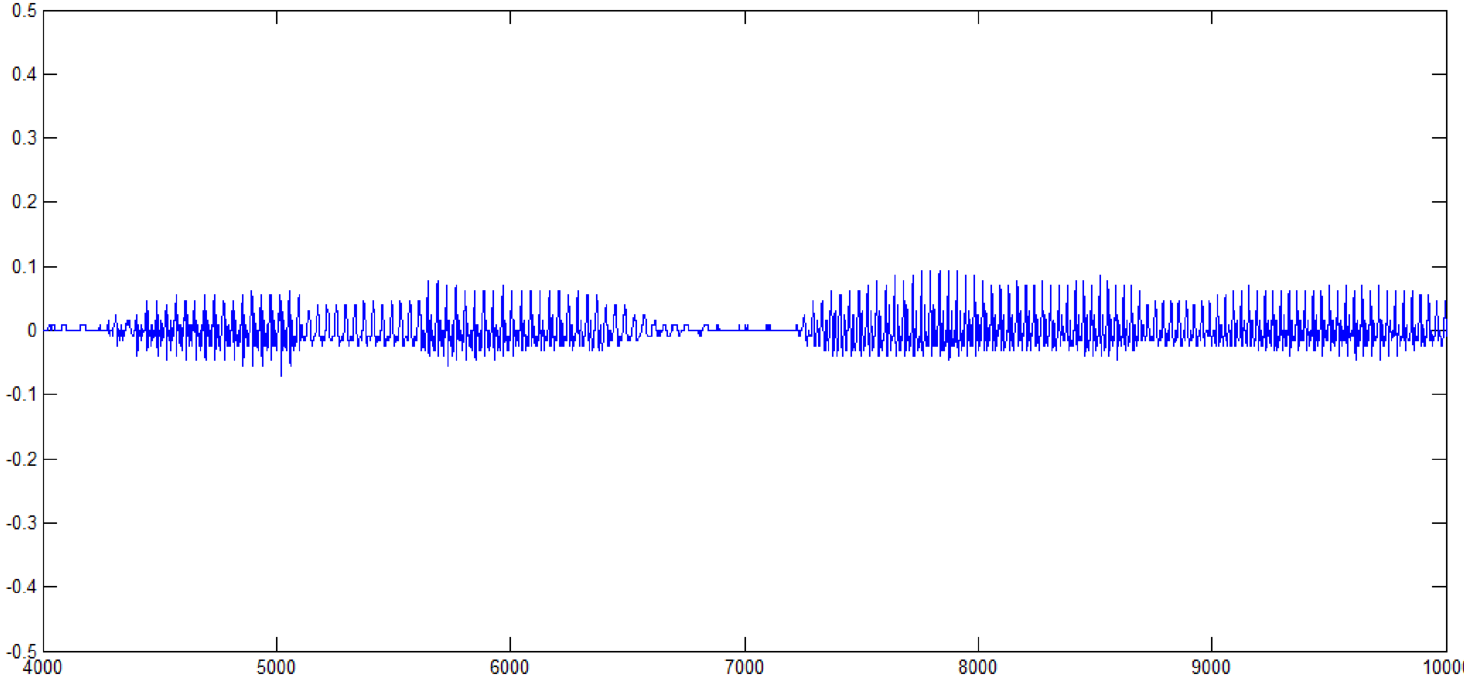
Processo estocástico discreto de parâmetro contínuo.

ii) Ruído térmico



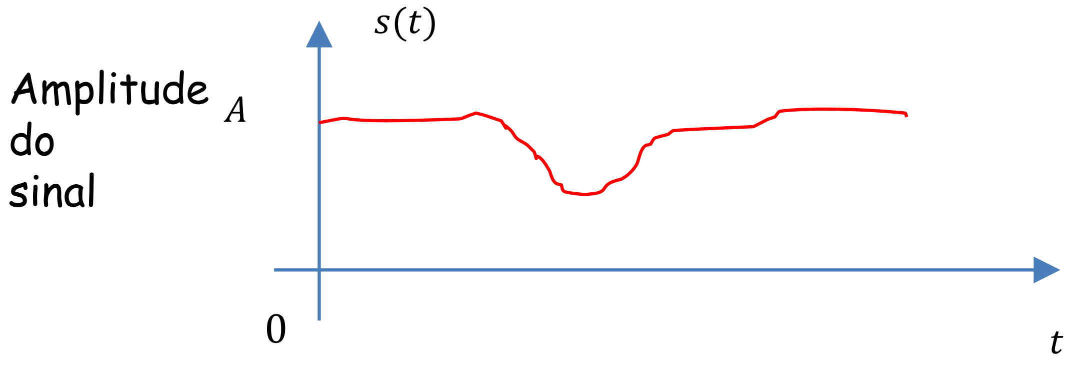
Processo estocástico contínuo de parâmetro contínuo.

iii) Sinais de voz



Processo estocástico contínuo de parâmetro discreto

iv) Sinal recebido de um enlace de rádio



Processo estocástico contínuo de parâmetro contínuo.

D. Especificação de processos estocásticos

- Fixando-se um valor para o parâmetro t, $(t \in \Upsilon)$ de um processo estocástico $x(t)$, obtém-se uma v.a. representada por x_t.

- Associada a esta v.a. tem-se uma FDP $F_{x_t}(X)$ e uma fdp $p_{x_t}(X)$

- Definição 1: especificação de 1a. ordem de um processo estocástico

Diz-se que um processo estocástico está especificado até a 1a. ordem quando a fdp $p_{x_t}(X)$ é conhecida para qualquer valor de $t \in \Upsilon$, ou seja,

$$p_{x_t}(X), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1

Considere um processo estocástico $x(t)$, cujas funções-amostra são retas da forma

$$x(t) = a_1 t + a_2,$$

Em que a_1 e a_2 são as v.a.s conjuntamente Gaussianas, ou seja, elas formam um vetor Gaussiano $\boldsymbol{a}$. Suponha que

$$\boldsymbol{m}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{K}_a = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine $p_{x_t}(X), \ \forall\, t$

b) Calcule $P(x_5 > 0)$

Solução:

a) Para determinar a fdp de 1ª. ordem calcula-se

$$x_t = a_1 t + a_2 = [t \quad 1]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Ta}$$

Como $\boldsymbol{a}$ é um vetor Gaussiano x_t é uma v.a. Gaussiana e

$$m_{x_t} = \boldsymbol{Tm}_a = [t \quad 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$
$$\sigma_{x_t}^2 = \boldsymbol{TK}_a\boldsymbol{T}^T = t^2 + t + 1$$

Logo, tem-se

$$p_{x_t}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t^2+t+1}} e^{-\frac{X^2}{2(t^2+t+1)}}$$

b) Para calcular $P(x_5 > 0)$ procede-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(x_5 > 0) &= \int_0^\infty p_{x_5}(X)dX \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{31}} e^{-\frac{X^2}{62}} dX \\ &= Q(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Definição 2: especificação de 2ª. ordem de um processo estocástico

Um processo estocástico está especificado até a 2ª. ordem quando a fdp conjunta $p_{x_{t_1}x_{t_2}}(X_1, X_2)$ é conhecida para qualquer par de valores (t_1, t_2), $t_1 \in \Upsilon$, $t_2 \in \Upsilon$, ou seja,

$$p_{x_{t_1}x_{t_2}}(X_1, X_2), \qquad \forall\ t_1 \in \Upsilon, t_2 \in \Upsilon$$

Exemplo 2

Seja $x(t)$ o processo estocástico definido no exemplo 1. Para determinar a expressão da fdp de 2ª. ordem de $x(t)$ considere 2 v.a.s x_{t_1} e x_{t_2} que são descritas por

$$\begin{cases} x_{t_1} = a_1 t_1 + a_2 \\ x_{t_2} = a_1 t_2 + a_2 \end{cases}{}'$$

em que o vetor aleatório $\boldsymbol{x}$, cujas componentes são x_{t_1} e x_{t_2}, se escreve

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_{t_1} \\ x_{t_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Ta},$$

em que $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{m}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{K}_a = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine $p_{x_{t_1} x_{t_2}}(X_1, X_2)$

b) Calcule $P(x_5 > 0 | x_0 < 0)$

Solução:

a) Como $\boldsymbol{a}$ é um vetor Gaussiano, $\boldsymbol{x}$ é também um vetor Gaussiano e pode-se escrever

$$\boldsymbol{m_x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{m}_a = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{K_x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{T}^T = \begin{bmatrix} t_1^2 + t_1 + 1 & t_1 t_2 + \dfrac{t_1 t_2}{2} + 1 \\ t_1 t_2 + \dfrac{t_1 t_2}{2} + 1 & t_2^2 + t_2 + 1 \end{bmatrix}$$

A expressão da fdp de 2ª. ordem é determinada por

$$p_{x_{t_1} x_{t_2}}(X_1, X_2) = p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \boldsymbol{K_x}}} e^{-\frac{1}{2}[X_1 \quad X_2]\boldsymbol{K_x}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}}$$

b) Para calcular $P(x_5 > 0|x_0 < 0)$ deve-se obter as quantidades em

$$P(x_5 > 0|x_0 < 0) = \frac{P(x_5>0, x_0<0)}{P(x_0<0)},$$

em que

$$P(x_0 < 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} dX = 1 - Q(0) = \frac{1}{2}$$

e

$$P(x_5 > 0, x_0 < 0) = \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{75}{4}}} e^{-\frac{1}{2}[X_1 \quad X_2]\begin{bmatrix} 31 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}} dX_2 dX_1$$

Logo, tem-se

$$P(x_5 > 0|x_0 < 0) = \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi\sqrt{75}} e^{-\frac{2}{75}(31X_2^2 - 7X_1X_2 + X_1^2)} dX_2 dX_1,$$

que pode ser calculada numericamente

- Definição 3: especificação de ordem m de um processo estocástico

Um processo estocástico está especificado até a ordem m quando a fdp conjunta

$$p_{x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_m}}(X_1, X_2, \dots, X_m)$$

é conhecida para qualquer conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$

- A especificação completa requer a especificação até a ordem m, o que na maioria dos casos é muito complexo ou impraticável.

- Por este motivo, restringe-se na prática a especificação até 2ª. ordem.

E. Momentos de processos estocásticos

- Os momentos de um processo estocástico são os momentos de v.a.s definidas em quaisquer instantes do processo.

- Definição 4: média de um processo estocástico

A média de um processo estocástico $x(t)$, representada por $m_x(t)$, é definida como a média da v.a. x_t associada a um instante qualquer $t \in \Upsilon$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
m_x(t) &= E[x_t] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X p_{x_t}(X) d\,X, \qquad t \in \Upsilon
\end{aligned}
$$

- Definição 5: função autocorrelação de um processo estocástico

A função autocorrelação de um processo estocástico $x(t)$, representada por $R_x(t_1, t_2)$, é definida como a correlação entre as v.a.s $x(t_1)$ e $x(t_2)$ associadas a dois valores quaisquer $t_1 \in \Upsilon$ e $t_2 \in \Upsilon$ do parâmetro de $x(t)$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
R_x(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 p_{x_{t_1}x_{t_2}}(X_1, X_2)\, d\, X_1 dX_2\,, \;\; t_1 \in \Upsilon \text{ e } t_2 \in \Upsilon
\end{aligned}
$$

- Note que o valor da função de um processo estocástico quando $t_1 = t_2 = t$ é o valor médio quadrático do processo estocástico dado por

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t, t) = E[x_t^2], \qquad t \in \Upsilon$$

- Definição 6: função autocovariância de um processo estocástico

A função autocovariância de um processo estocástico $x(t)$, representada por $K_x(t_1, t_2)$, é definida como a covariância entre as v.a.s $x(t_1)$ e $x(t_2)$ associadas a dois valores quaisquer $t_1 \in \Upsilon$ e $t_2 \in \Upsilon$ do parâmetro de $x(t)$, ou seja,

$$K_x(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X_1 - m_x(t_1))(X_2 - m_x(t_2)) p_{x_{t_1} x_{t_2}}(X_1, X_2) d\, X_1 dX_2,$$
$$t_1 \in \Upsilon \text{ e } t_2 \in \Upsilon$$

- A relação entre a média, a função autocorrelação e a função autocovariância de um processo estocástico $x(t)$ é dada por

$$K_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1) m_x(t_2)$$

Exemplo 3

Considere o processo estocástico $x(t) = a_1 t + a_2$, em que a_1 e a_2 são v.a.s conjuntamente Gaussianas com médias $m_{a_1} = E[a_1] = m_{a_2 =} E[a_2] = 0$, variâncias $\sigma_{a_1}^2 = \sigma_{a_2}^2 = 1$ e covariâncias $k_{a_1 a_2} = \frac{1}{2} = k_{a_2 a_1}$.

Calcule a média, a função autocorrelação e a função autocovariância de $x(t)$.

Solução:

A média de $x(t)$ é dada por

$$m_x(t) = E[x(t)] = E[a_1 t + a_2] = E[a_1]t + E[a_2] = 0$$

A função autocorrelação é calculada por

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] \\ &= E[(a_1 t_1 + a_2)(a_1 t_2 + a_2)] \\ &= t_1 t_2 E[{a_1}^2] + E[a_1 a_2](t_1 + t_2) + E[{a_2}^2] \end{aligned}$$

Como $m_{a_1} = E[a_1] = m_{a_2 =} E[a_2] = 0$ e $\sigma_{a_1}^2 = \sigma_{a_2}^2 = 1$, tem-se

$$\sigma_{a_1}^2 = E\left[(a_1 - m_{a_1})^2\right] = E[{a_1}^2] = 1 \text{ (valor médio quadrático)}$$
$$\sigma_{a_2}^2 = E\left[(a_2 - m_{a_2})^2\right] = E[{a_2}^2] = 1$$

Além disso, como $k_{a_1 a_2} = k_{a_2 a_1} = E\left[(a_1 - m_{a_1})(a_2 - m_{a_2}))\right] = E[a_1 a_2] = \frac{1}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1) m_x(t_2) \\ &= t_1 t_2 E[{a_1}^2] + E[a_1 a_2](t_1 + t_2) + E[{a_2}^2] \\ &= t_1 t_2 + \frac{1}{2}(t_1 + t_2) + 1 \end{aligned}$$

F. Processos estocásticos usuais e aplicações

i) Transmissão binária semi-aleatória

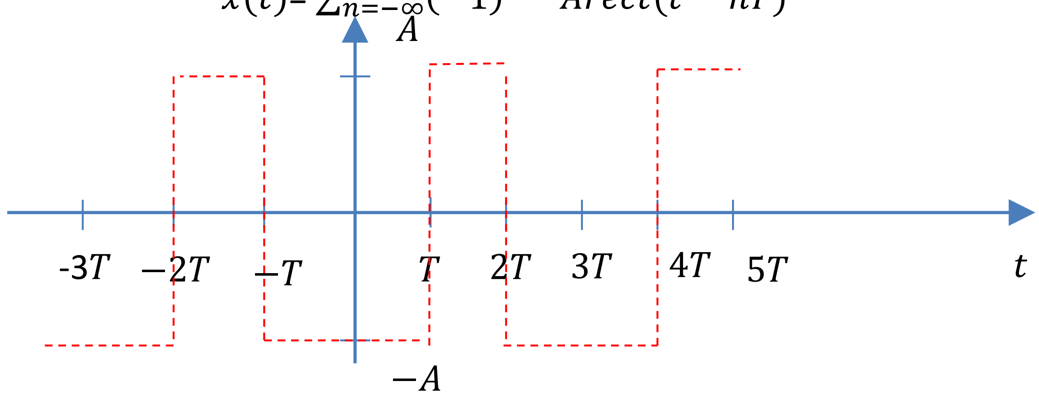
Considere o processo estocástico $x(t)$ cujo intervalo é dado por

$$I_n = \big((n-1)T, nT\big], \qquad n \text{ inteiro}$$

em que $x(t)$ pode assumir um dentre 2 valores, A e $-A$.

Uma função amostra deste processo estocástico é ilustrada abaixo.

$x(t)$= $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}A rect(t-nT)$



Supõe-se que o valor do processo em um determinado intervalo é estatisticamente independente do seu valor nos demais intervalos.

Além disso, supõe-se que os valores A e $-A$ ocorrem com probabilidades p e $(1-p)$, respectivamente.

Para um instante genérico qualquer t, a fdp de 1ª ordem do processo é expressa por

$$p_{x_t}(X) = p\delta(X-A) + (1-p)\delta(X+A)$$

A média deste processo estocástico é dada por

$$m_x(t) = E[x_t] = \int_{-\infty}^{\infty} X p_{x_t}(X) d\,X = A(2p-1)$$

Para calcular a função autocorrelação $R_x(t_1, t_2)$ deste processo, considere a v.a. $y = x(t_1)x(t_2)$, em que t_1 e t_2 são instantes quaisquer satisfazendo

$$\begin{cases} t_1 \in I_{n_1} \\ t_2 \in I_{n_2} \end{cases}$$

São consideradas 2 situações distintas. Na primeira delas, os instantes t_1 e t_2, que definem $x(t_1)$ e $x(t_2)$, pertencem ao mesmo intervalo, ou seja, $n_1 = n_2$.

Neste caso, a v.a. y assume o valor A^2 e tem-se

$$p_{y|n_1=n_2}(Y) = \delta(Y - A^2)$$

Na segunda situação, considera-se que $n_1 \neq n_2$ e que a v.a. y pode assumir os valores A^2 e $-A^2$, o que resulta em

$$P(y = A^2|n_1 \neq n_2)$$
$$= \mathrm{P}\left(x_{t_1} = A, x_{t_2} = A \middle| n_1 \neq n_2\right) + \mathrm{P}\left(x_{t_1} = -A, x_{t_2} = -A \middle| n_1 \neq n_2\right)$$

e

$$P(y = -A^2|n_1 \neq n_2)$$
$$= \mathrm{P}\left(x_{t_1} = A, x_{t_2} = -A \middle| n_1 \neq n_2\right) + \mathrm{P}\left(x_{t_1} = -A, x_{t_2} = A \middle| n_1 \neq n_2\right)$$

Dado $n_1 \neq n_2$ a v.a. $x(t_1)$ toma valores independentemente da v.a. $x(t_2)$, e obtém-se

$$P(y = A^2|n_1 \neq n_2) = p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

$$P(y = -A^2|n_1 \neq n_2) = 2\mathrm{p} - 2p^2$$

Consequentemente, tem-se

$$p_{y|n_1 \neq n_2}(Y) = (2p^2 - 2p + 1)\delta(Y - A^2) + (2\mathrm{p} - 2p^2)\delta(Y + A^2)$$

Como $R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = E[y]$ obtém-se de $p_{y|n_1 = n_2}(Y) = \delta(Y - A^2)$ e $p_{y|n_1 \neq n_2}(Y)$ que

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} A^2, & n_1 = n_2 \\ A^2(2\mathrm{p} - 2p^2), & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

ii) Processo de Poisson

Considere a experiência que consiste em observar o número de ocorrências de um evento durante um intervalo Δt.

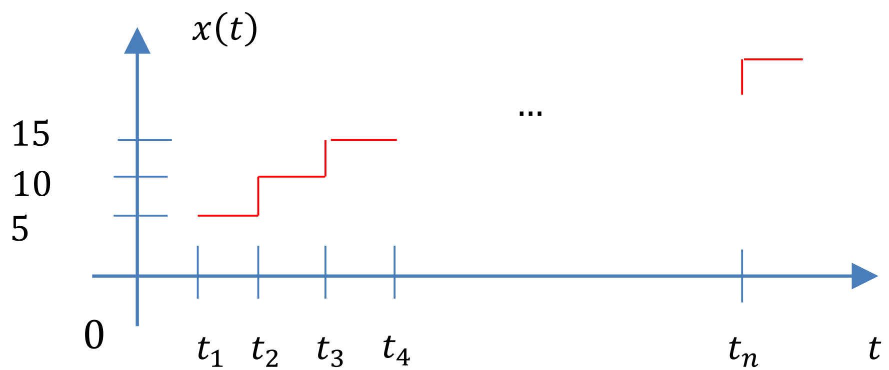
Seja N este número supõe-se que a probabilidade de k ocorrências em um intervalo Δt é dada por

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda \Delta t}(\lambda \Delta t)^k}{k!}, \qquad k = 0,1,\dots,$$

em que os números de ocorrências em intervalos disjuntos são eventos estatisticamente independentes.

Define-se o processo $x(t)$ da seguinte maneira: assume-se que $x(0) = 0$ e que $x(t)$ é o número de ocorrências no intervalo $(0, t)$.

Desta forma, $x(t)$ é completamente especificado e o processo associado é um processo de Poisson, conforme ilustrado abaixo.



Observe que para qualquer par de instantes (t_1, t_2) com $t_2 > t_1$, a v.a. $x(t_2) - x(t_1)$ tem fdp de Poisson de parâmetro $\lambda(t_2 - t_1)$.

Considere agora o cálculo de momentos de $x(t)$ com $t_a > t_b$ e $k = 0,1,2,\ldots$ o que resulta

$$P(x(t_a) - x(t_b) = k) = e^{-\lambda(t_a - t_b)} \frac{(\lambda(t_a - t_b))^k}{k!}$$

Pode-se então verificar que

$$E[x(t_2) - x(t_1)] = \lambda(t_a - t_b)$$

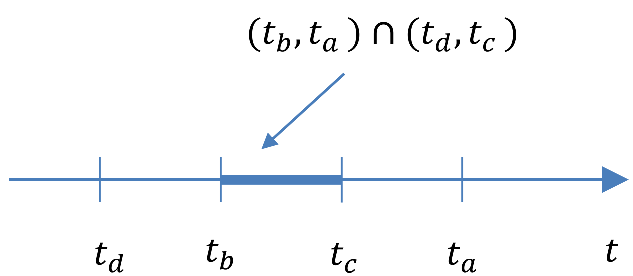
e

$$E[(x(t_2) - x(t_1))^2] = \lambda^2(t_a - t_b)^2 + \lambda(t_a - t_b)$$

O valor esperado do produto das v.a.s $(x(t_a) - x(t_b))$ e $(x(t_c) - x(t_d))$ pode ser calculado para $t_a > t_b > t_c > t_d$ levando em conta sua ind. est.

$$E[(x(t_a) - x(t_b))(x(t_c) - x(t_d))] = E[x(t_a) - x(t_b)]\, E[(x(t_c) - x(t_d)]$$
$$= \lambda^2 (t_a - t_b)\ (t_c - t_d)$$

No caso em que os intervalos (t_b, t_a) e (t_d, t_c) se superpõem, as v.a.s não serão independentes, conforme ilustrado abaixo.



Nesta situação, usa-se

$$x(t_a) - x(t_b) = (x(t_a) - x(t_c)) + (x(t_c) - x(t_b))$$
$$x(t_c) - x(t_d) = (x(t_c) - x(t_b)) + (x(t_b) - x(t_d))$$

em que, após manipulações, obtém-se

$$E[(x(t_a) - x(t_b))(x(t_c) - x(t_d))] = \lambda^2(t_a - t_b)\,(t_c - t_d) + \lambda(t_c - t_b)$$

A média e a função autocorrelação de $x(t)$ são obtidas a partir de $E[(x(t_a) - x(t_b))]$ e da expressão anterior.

Tomando-se $t_a = t$ e $t_b = 0$ em $E[(x(t_a) - x(t_b))]$ obtém-se

$$m_x(t) = E[x(t)] = \lambda t$$

Tomando-se $t_a = t_1$, $t_c = t_2$ e $t_b = t_d = 0$ em $E[(x(t_a) - x(t_b))(x(t_c) - x(t_d))]$ obtém-se

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2, & t_1 > t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2, & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

iii) Onda senoidal com fase aleatória

Considere o processo estocástico $x(t)$ definido por

$$x(t) = A\sin(2\pi f_o + \theta)$$

em que θ é um ângulo de fase modelado com uma v.a. uniformemente distribuída em $(0,2\pi]$, ou seja,

$$p_\theta(\Theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & \Theta \in (0,2\pi] \\ 0, & \Theta \neq (0,2\pi] \end{cases}$$

A média deste processo estocástico é dada por

$$m_x(t) = E[A\sin(2\pi f_o t + \theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} A\sin(2\pi f_o t + \theta) p_\theta(\Theta) d\Theta$$

$$= \int_0^{2\pi} A\sin(2\pi f_o t + \theta)\frac{1}{2\pi} d\Theta = 0$$

A função autocorrelação do processo estocástico é dada por

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = E[A\sin(2\pi f_o t_1 + \theta)\, A\sin(2\pi f_o t_2 + \theta)]$$
$$= \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi f_o(t_2 - t_1))] - \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi f_o(t_2 + t_1)) + 2\theta]$$

Levando-se em conta que

$$E[\cos(2\pi f_o(t_2 + t_1)) + 2\theta] = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_o(t_2 + t_1)) + 2\theta) \frac{1}{2\pi} d\Theta = 0$$

tem-se

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2} [\cos(2\pi f_o(t_2 - t_1))]$$

Para determinar a fdp de 1ª ordem deste processo estocástico basta verificar que x_t é uma função da v.a. θ, ou seja,

$$x_t = g(\theta) = A\sin(2\pi f_o + \theta)$$

Usando-se as ferramentas de funções de v.a.s pode-se chegar à fdp de 1ª ordem deste processo:

$$p_{x_t}(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - X^2}}, & |X| \leq A \\ 0, & |X| > A \end{cases}$$

G. Estacionariedade de processos estocásticos

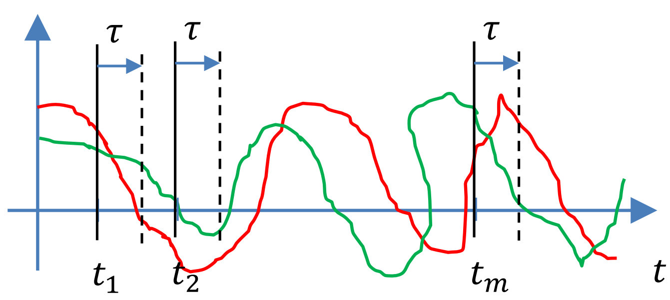
- Um processo estocástico pode ser estacionário em diversos graus.

- A estacionariedade significa que as propriedades estatísticas de um processo estocástico não se alteram ao longo do tempo.

- Definição 7: estacionariedade de ordem m

Um processo estocástico $x(t)$ é dito estacionário de ordem m quando a sua fdp de ordem m não varia com um deslocamento no tempo, ou seja, quando

$$p_{x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_m}}(X_1, X_2, \dots, X_m) = p_{x_{t_1+\tau} x_{t_2+\tau} \dots x_{t_m+\tau}}(X_1, X_2, \dots, X_m), \ \forall \, \tau$$



Observações

i) Um processo estocástico $x(t)$ é estacionário de 1ª ordem quando

$$p_{x_t}(X) = p_{x_{t+\tau}}(X), \qquad \forall\, \tau$$

A igualdade acima é satisfeita se, e somente se, a fdp de 1ª ordem do processo é a mesma para qualquer τ, ou seja, $p_{x_t}(X)$ não depende de t.

ii) Um processo estocástico $x(t)$ é estacionário de 2ª ordem quando

$$p_{x_{t_1}x_{t_2}}(X_1, X_2) = p_{x_{t_1+\tau}x_{t_2+\tau}}(X_1, X_2),\ \forall\, \tau$$

A igualdade acima é satisfeita de, e somente se, a fdp de 2ª ordem do processo estocástico depende apenas da diferença entre t_1 e t_2.

iii) Se $x(t)$ é um processo estocástico de ordem m então ele é também estacionário de ordem k, $\forall\, k < m$.

- Definição 8: estacionariedade no sentido estrito

Um processo estocástico é dito estacionário no sentido estrito, ou estritamente estacionário, quando ele é estacionário de ordem m para qualquer valor inteiro de m.

$$p_{x_{t_1}x_{t_2}\dots x_{t_m}}(X_1, X_2, \dots, X_m) = p_{x_{t_1+\lambda}x_{t_2+\lambda}\dots x_{t_m+\lambda}}(X_1, X_2, \dots, X_m),\ \forall\, \lambda, m$$

- Definição 9: estacionariedade no sentido amplo

Um processo estocástico $x(t)$ é dito estacionário no sentido amplo se

$$m_x(t) = \eta_x, \qquad \forall\, t$$

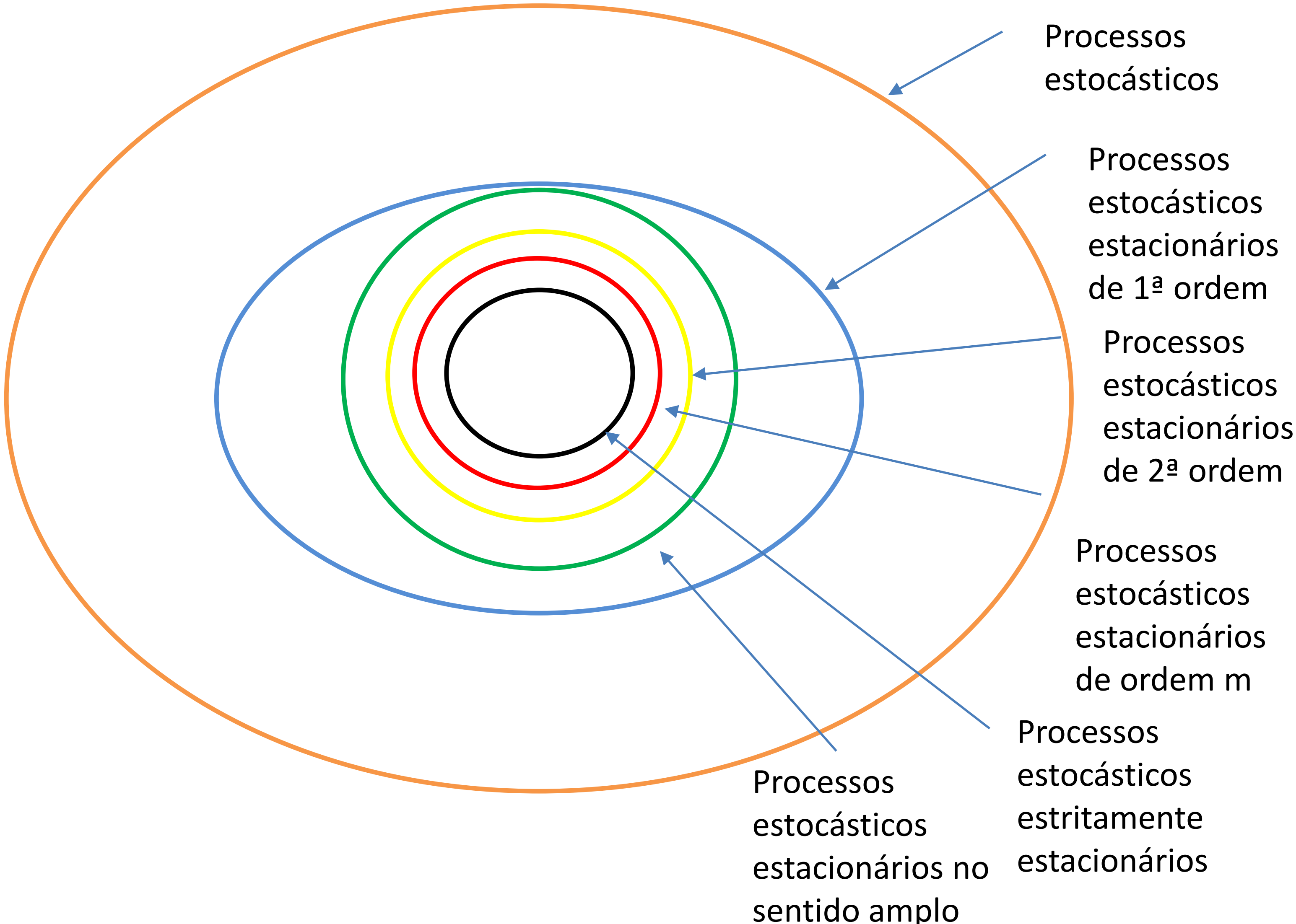
e

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau), \qquad \forall\, \tau,$$

o que é verificado quando a média é constante e sua função autocorrelação depende da diferença $\tau = t_2 - t_1$.

- Se um processo estocástico é estacionário de 2ª ordem então o processo é também estacionário no sentido amplo. Entretanto, a recíproca não é verdadeira.

Relações entre processos estocásticos e estacionariedade



Ergodicidade

- A caracterização completa de um processo estocástico exige o conhecimento de todas as suas funções-amostra.

- Essa caracterização permite a determinação de diversas estatísticas do processo como, por exemplo, sua média e sua função autocorrelação.

- Entretanto, para processos ergódicos essas características podem ser determinadas a partir de apenas uma função-amostra.

- Para processos ergódicos, os valores médios e momentos podem ser determinados através de médias temporais.

- Em particular, o momento de ordem m pode ser obtido através da média temporal

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (x(t))^m \, dt$$

em que $x(t)$ é uma função-amostra qualquer do processo.

- Note que em um processo ergódico, todas as funções-amostra fornecem o mesmo valor para o limite na equação acima.

- É comum assumir ergodicidade para fins práticos ainda que seja muito difícil prová-la para processos físicos.

Propriedades

- Em processos estocásticos estacionários no sentido amplo, a função autocorrelação $R_x(t_1, t_2)$ depende apenas da diferença $t_2 - t_1$ e pode ser representada por

$$R_x(\tau) = R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)],$$

em que $\tau = t_2 - t_1$.

- Neste caso, tem-se

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

i) A função autocorrelação $R_x(\tau)$ de um processo estocástico estacionário no sentido amplo é par, ou seja,

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

ii) O valor da função $R_x(\tau)$ de um processo estocástico estacionário no sentido amplo em $\tau = 0$ é igual ao valor médio quadrático do processo:

$$R_x(0) = E[x^2(t)]$$

iii) Se um processo estocástico estacionário no sentido amplo contém uma componente periódica de período T, ou seja, se

$$x(t) = x(t + nT), \;\; n \text{ inteiro},$$

então sua função autocorrelação $R_x(\tau)$ possui uma componente periódica de mesmo período, ou seja,

$$R_x(\tau) = R_x(\tau + nT), \;\; n \text{ inteiro},$$

iv) Se um processo estocástico estacionário no sentido amplo não contém componentes periódicas, então

$$\lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = m_x^2(t) = \eta_x^2$$

v) A função $R_x(\tau)$ de um processo estocástico estacionário no sentido amplo é máxima para $\tau = 0$, ou seja,

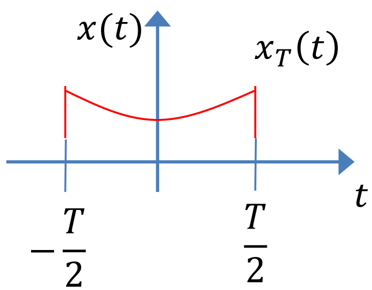
$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0), \qquad \forall \tau \neq 0$$

H. Densidade espectral de potência

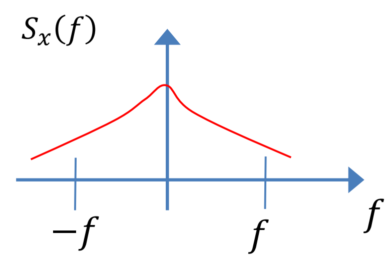
- Na análise e projeto de sistemas em engenharia elétrica, é importante conhecer como a potência se distribui ao longo do espectro de frequências.

- A densidade espectral de potência é uma função da frequência que, quando integrada ao longo de uma faixa de frequências, fornece o valor da potência de sinal existente na faixa de frequências considerada.

- No caso de um sinal determinístico $x(t)$, a função densidade espectral de potência de $x(t)$ é definida por

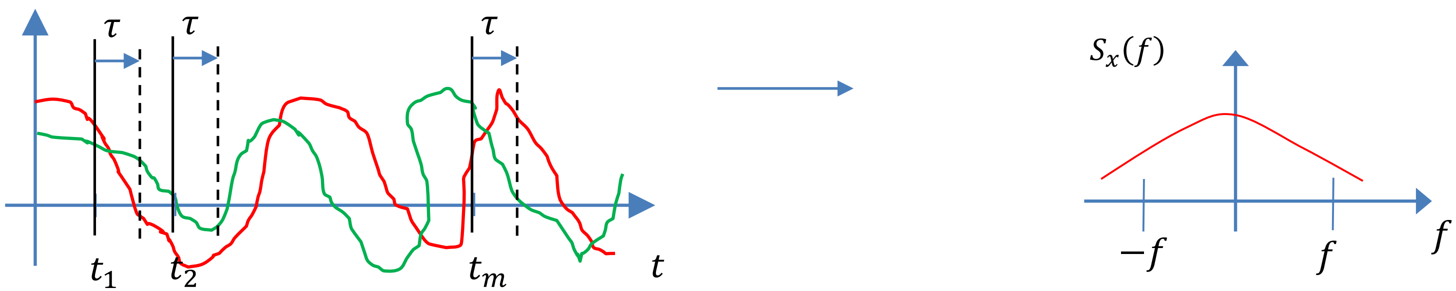


$$S_x(f) = \frac{\lim_{T\to\infty} |X_T(f)|^2}{T},$$



em que $X_T(f) = \mathfrak{I}\{x_T(t)\}$ é a transformada de Fourier de $x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \le \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$

- No caso de processos estocásticos, calcula-se a média estatística das densidades espectrais de potência de cada função-amostra do processo.



- Como as funções-amostra de um processo estocástico são funções determinísticas pode-se calcular a densidade espectral de potência $S_x(f)$.

- No caso de um processo estocástico $x(t)$ tem-se

$$S_x(f) = E\left[\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(f)|^2]}{T}$$

- Considerando-se a definição da transformada de Fourier, obtém-se

$$|X_T(f)|^2 = X_T(f)X_T{}^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t_1)e^{-j2\pi f t_1}\,dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_T{}^*(t_2)e^{j2\pi f t_2}\,dt_2$$

- Considerando-se $x(t)$ real e levando-se em conta $x_T(t)$, tem-se

$$|X_T(f)|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t_1)x_T(t_2)\,e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}\,dt_1 dt_2$$

- Usando-se $|X_T(f)|^2$ e a expressão para $S_x(f)$, obtém-se a densidade espectral de potência de $x(t)$:

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{E[|X_T(f)|^2]}{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[x_T(t_1)x_T(t_2)]e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}\,dt_1 dt_2$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_x(t_1,t_2)\,e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}\,dt_1 dt_2$$

- No caso de um processo estocástico estacionário no sentido amplo, $S_x(f)$ pode ser simplificada usando-se

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2)$$

- Logo, tem-se

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_x(t_1 - t_2)\, e^{-j2\pi f(t_1 - t_2)}\, dt_1 dt_2$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t_1 - t_2)\, \mathrm{ret}_T(t_1)\mathrm{ret}_T(t_2) e^{-j2\pi f(t_1 - t_2)}\, dt_1 dt_2$$

em que $\mathrm{ret}_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$

- Fazendo-se a mudança de variáveis $t_2 = t_1 - \tau$ na integral em t_2, escreve-se

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{ret}_T(t_1) \mathrm{ret}_T(t_2) dt_1 \right) d\tau$$

- Como a função $\mathrm{ret}_T(t)$ é par , $\mathrm{ret}_T(t_1 - \tau) = \mathrm{ret}_T(\tau - t_1)$ na integral e a integral em t_1 na expressão acima escreve-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{ret}_T(\tau - t_1) \mathrm{ret}_T(t_1) dt_1 = \mathrm{ret}_T(\tau) * \mathrm{ret}_T(\tau) = T\mathrm{tri}_{2T}(\tau),$$

em que $\mathrm{tri}_{2T}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{2|t|}{T}, & |t| \le \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$

- Como $\lim_{T\to\infty} \mathrm{tri}_{2T}(\tau) = 1$, obtém-se

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, T\mathrm{tri}_{2T}(\tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \Im\{R_x(\tau)\}$$

o que mostra que $S_x(f)$ equivale a transformada de Fourier de $R_x(\tau)$.

- A potência média de um processo estocástico $x(t)$ em uma faixa de frequências caracterizada por $[f_1, f_2]$ é calculada por

$$P_{x[f_1,f_2]} = \int_{-f_2}^{-f_1} S_x(f) df + \int_{f_1}^{f_2} S_x(f) df$$

- A potência média total de $x(t)$ é obtida por

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$$

em que para o caso de $x(t)$ ser um processo estocástico estacionário no sentido amplo, tem-se

$$P_x = R_x(0\ ) = E[x^2(t)]$$

Exemplo 4

Um processo estocástico estacionário no sentido amplo é um processo de ruído branco se sua densidade espectral de potência é constante em todo o espectro de frequências, ou seja,

$$S_x(f) = c,$$

em que c é uma constante.

Calcule a função autocorrelação $R_x(\tau)$.

Solução:

Como $S_x(f) = \Im\{R_x(\tau)\}$, tem-se

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \Im^{-1}\{S_x(f)\} \text{ (transformada inversa de Fourier)} \\ &= \Im^{-1}\{c\} \\ &= c\delta(\tau) \end{aligned}$$

Exemplo 5

Considere o processo estocástico descrito por

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(2\pi f_o t + \theta),$$

em que a fase θ é uniformemente distribuída no intervalo em $(0{,}2\pi]$, ou seja,

$$p_\theta(\Theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & \Theta \in (0{,}2\pi] \\ 0, & \Theta \neq (0{,}2\pi] \end{cases}$$

Calcule a densidade espectral de potência $S_x(f)$ e a potência média do sinal.

Solução:

A função autocorrelação do processo estocástico é dada por

$$R_x(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = E[A\cos(2\pi f_o t_1 + \theta)\, A\cos(2\pi f_o t_2 + \theta)]$$
$$= \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi f_o (t_2 - t_1))] - \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi f_o (t_2 + t_1)) + 2\theta]$$
$$= \frac{A^2}{2} [\cos(2\pi f_o (t_2 - t_1))]$$

ou

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_o \tau)$$

Logo, a densidade espectral de potência é dada por

$$S_x(f) = \Im\{R_x(\tau)\} = \Im\left\{\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_o \tau)\right\}$$
$$= \frac{A^2}{4}\delta(f - f_o) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_o)$$

A potência média do sinal é descrita por

$$R_x(0) = \frac{A^2}{2}$$

I. Caracterização conjunta de processos estocásticos

- Em muitas situações, é de interesse examinar dois (ou mais) processos estocásticos simultaneamente.

- Nestes casos, é necessário especificar conjuntamente os processos envolvidos.

- Além disso, é também possível definir momentos envolvendo dois ou mais processos estocásticos.

- Da maneira análoga, é possível definir para dois ou mais processos estocásticos diversos em diversos níveis de estacionariedade conjunta.

- Definição 11: Especificação conjunta de ordem $m+n$ de 2 proc. estoc.

Dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ estão conjuntamente especificados até a ordem $m+n$ quando, para todo conjunto de $m+n$ valores $\{t_1, t_2, \dots, t_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_n\}$, a fdp conjunta das v.a.s $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m), y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)\}$ é conhecida, ou seja, sabe-se

$$p_{x(t_1),x(t_2),\dots,x(t_m),\, y(t_1),y(t_2),\dots,y(t_n)}(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

- Definição 12: Especificação conjunta completa de 2 proc. estoc.

Dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ estão conjunta e completamente especificados quando eles estão conjuntamente especificados até a ordem $m+n$ para quaisquer valores de m e n, ou seja,

$$p_{x_{t_1},x_{t_2},\dots,x_{t_m},y_{t'_1},y_{t'_2},\dots,y_{t'_n}}(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n), \qquad \forall\, m, n$$

- Definição 13: Função correlação cruzada

A função correlação cruzada $R_{xy}(t_1, t_2)$ de dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ é definida como a correlação entre as v.a.s $x(t_1)$ e $y(t_2)$ definidas sobre cada um dos processos, respectivamente.

Isto significa que

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)]$$

- Definição 14: Função covariância cruzada

A função covariância cruzada $K_{xy}(t_1, t_2)$ de dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ é definida como a covariância entre as v.a.s $x(t_1)$ e $y(t_2)$ definidas sobre cada um dos processos, respectivamente.

Isto significa que

$$K_{xy}(t_1, t_2) = E\left[(x(t_1) - m_x(t_1))(y(t_2) - m_y(t_2))\right]$$

Relação entre média, função correlação cruzada e função covariância cruzada:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2)$$

- Definição 15: Estacionariedade conjunta de ordem $m+n$ de dois processos estocásticos

Dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ são conjuntamente estacionários de ordem $m+n$ quando a fdp conjunta de quaisquer $m+n$ v.a.s

$$p_{x_{t_1},\dots,x_{t_m},y_{t'_1},\dots,y_{t'_n}}(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n) = p_{x_{t_1+\tau},\dots,x_{t_m+\tau},y_{t'_1+\tau},\dots,y_{t'_n+\tau}}(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n), \qquad \forall\, \tau$$

- Definição 16: Estacionariedade conjunta no sentido estrito de dois processos estocásticos

Dois processos estocásticos são conjuntamente estacionários no sentido estrito quando, para quaisquer valores de m e n, eles são conjuntamente estacionários de ordem $m+n$, ou seja,

$$p_{x_{t_1},\dots,x_{t_m},y_{t'_1},\dots,y_{t'_n}}(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n)$$
$$= p_{x_{t_1+\tau},\dots,x_{t_m+\tau},y_{t'_1+\tau},\dots,y_{t'_n+\tau}}(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n), \qquad \forall\, m,n,\tau$$

- Definição 17: Estacionariedade conjunta no sentido amplo de dois processos estocásticos

Dois processos estocásticos são conjuntamente estacionários no sentido amplo quando cada um deles é estacionário no sentido amplo e a função correlação cruzada $R_{xy}(t_1, t_2)$ dos 2 processos depende apenas da diferença $\tau = t_2 - t_1$.

Logo, as condições a serem satisfeitas no caso de estacionariedade conjunta no sentido amplo são:

$$m_x(t) = \eta_x,\ m_y(t) = \eta_y,\ \forall t$$
$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau),\ R_y(t_1, t_2) = R_y(\tau),\ \tau = t_2 - t_1$$
$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau),\ \ \tau = t_2 - t_1$$

- Definição 18: Densidade espectral cruzada de dois processos estocásticos

A densidade espectral cruzada de dois processos estocásticos conjuntamente estacionários no sentido amplo é definido por

$$S_{xy}(f) = \Im\{R_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

- Definição 19: Processos estocásticos estatisticamente independentes

Dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ são estatisticamente independentes quando, para quaisquer valores inteiros positivos m e n, e para qualquer conjunto de valores $\{t_1, t_2, \dots, t_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_n\}$, a fdp conjunta das v.a.s $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m), y(t'_1), y(t'_2), \dots, y(t'_n)\}$ pode ser escrita como o produto da fdp conjunta das v.a.s $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)\}$ e com fdp conjunta das v.a.s $\{ y(t'_1), y(t'_2), \dots, y(t'_n)\}$, ou seja,

$$p_{x_{t_1},\dots,x_{t_m},y_{t'_1},\dots,y_{t'_n}}(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n) = p_{x_{t_1},\dots,x_{t_m}}(X_1, \dots, X_m)p_{y_{t'_1},\dots,y_{t'_n}}(Y_1, \dots, Y_n), \qquad \forall\, m, n$$

- Definição 20: Processos estocásticos descorrelacionados

Dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados quando sua função covariância cruzada é nula para quaisquer valores de t_1 e t_2, ou seja,

$$K_{xy}(t_1, t_2) = 0, \qquad \forall\, t_1, t_2,$$

o que equivale a

$$R_{xy}(t_1, t_2) = m_x(t_1) m_y(t_2), \qquad \forall\, t_1, t_2$$

- Definição 21: Processos estocásticos ortogonais

Dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ são ortogonais quando sua função correlação cruzada é nula para quaisquer valores de t_1 e t_2, ou seja,

$$R_{xy}(t_1, t_2) = 0, \qquad \forall\, t_1, t_2,$$

- Se a média de um dos processos ($x(t)$ e $y(t)$) for nula, os processos estocásticos descorrelacionados são também ortogonais.

Propriedades

Considere a função correlação cruzada dada por

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)],$$

em que os processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ são conjuntamente estacionários no sentido amplo.

As seguintes propriedades são verificadas:

i) $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$

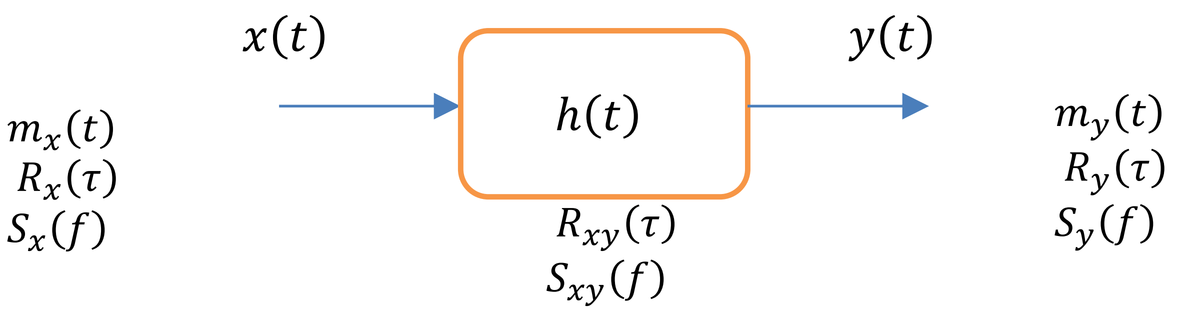
ii) $R_{xy}^2(\tau) \leq R_x(0)R_y(0)$

iii) $2|R_{xy}(\tau)| \leq R_x(0) + R_y(0), \ \forall\tau \neq 0$

J. Processos estocásticos e sistemas lineares

- Esta seção estuda a caracterização da saída de um sistema linear invariante no tempo quando se aplica um processo estocástico estacionário no sentido amplo.

- Considere um sistema linear invariante no tempo descrito pela resposta ao impulso $h(t)$ com entrada de um processo estocástico $x(t)$ e saída $y(t)$.



- A saída do sistema se relaciona a sua entrada pela convolução dada por

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha$$

- Os resultados aqui descritos restringem-se ao caso de sistemas fisicamente realizáveis e estáveis no sentido BIBO dado por:

i) $h(t) = 0, \quad t < 0$ -> sistema causal

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ -> sistema absolutamente integrável

- Dadas essas condições, escreve-se a saída do sistema como

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) h(t - \alpha) d\alpha = \int_{0}^{\infty} x(t - \beta) h(\beta) d\beta \,,$$

em que a última integral é obtida fazendo-se $\alpha = t - \beta$.

- Considere agora o cálculo da média e da função autocorrelação do processo estocástico $y(t)$. A média é dada por

$$m_y(t) = E[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t)]h(t-\alpha)d\alpha = m_x(t) * h(t)$$

- Considerando-se que $x(t)$ é estacionário no sentido amplo, e por esse motivo $m_x(t) = \eta_x$, obtém-se

$$m_y(t) = \eta_x \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\alpha)d\alpha = \eta_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)d\beta = \eta_x H(0) = \eta_y$$

em que $H(f) = \Im\{h(t)\}$ é a resposta em frequência do sistema, as médias são constantes e o sistema é estável.

- A função autocorrelação $R_y(t_1, t_2)$ de $y(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) = E[y(t_1)y(t_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[x(\alpha)x(\beta)]h(t_1-\alpha)h(t_2-\beta)d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\alpha,\beta)h(t_1-\alpha)h(t_2-\beta)d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\alpha-\beta)h(t_1-\alpha)h(t_2-\beta)d\alpha d\beta \end{aligned}$$

- Fazendo a mudança de variáveis $\lambda = t_1 - \alpha$ e $\gamma = t_2 - \beta$, tem-se

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_x\Big(\underbrace{t_1 - t_2 - \lambda + \gamma}_{\tau-\lambda+\gamma}\Big) h(\lambda)h(\gamma)d\lambda d\gamma = R_y(\tau),$$

em que $R_y(t_1, t_2)$ depende apenas da diferença $\tau = t_1 - t_2$.

- Com algumas manipulações algébricas, tem-se

$$R_y(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_x(\tau)$$

- A função correlação cruzada $R_{xy}(t_1, t_2)$ de $x(t)$ e $y(t)$ é dada por

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)\mathrm{y}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t_1)x(\alpha)]h(t_2 - \alpha)d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t_1, t_2 - \beta)h(\beta)d\beta$$

- Quando $x(t)$ é estacionário no sentido amplo obtém-se

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t_1, t_2 - \beta)h(\beta)d\beta = h(\tau) * \ R_x(\tau)$$

- Em um sistema linear e invariante no tempo, se $x(t)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo então $x(t)$ e $y(t)$ são conjuntamente estacionários no sentido amplo.

- A densidade espectral de potência de $y(t)$ é obtida por

$$S_y(f) = H(f)H^*(f)S_x(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

- A densidade espectral cruzada de $x(t)$ e $y(t)$ é dada por

$$S_{xy}(f) = H(f)S_x(f)$$

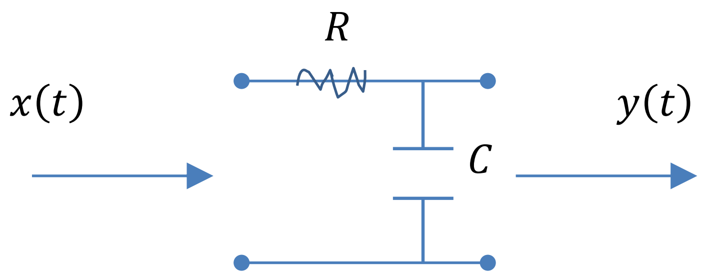
Exemplo 6

Considere um processo estocástico de ruído branco $x(t)$ com média nula e densidade espectral de potência dada por

$$S_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

Neste caso, tem-se $R_x(\tau) = \mathfrak{I}\{S_x(f)\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

Determine a média, a função autocorrelação e a potência média do processo estocástico $y(t)$ obtido pela passagem de $x(t)$ através do filtro RC da figura abaixo.



Solução:

A resposta em frequência do filtro RC é dada por

$$H(f) = \frac{\frac{1}{j2\pi f C}}{R + \frac{1}{j2\pi f C}} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

A média de $y(t)$ é calculada por

$$m_y(t) = \eta_x H(0) = \eta_x 1 = 0$$

Para calcular $R_y(\tau)$ é conveniente calcular primeiro $S_y(f)$:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \left(\frac{1}{1 + j2\pi f RC}\right)^2 \frac{N_0}{2}$$

Usando-se a transformada inversa de Fourier obtém-se

$$R_y(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{S_y(f)\} = \frac{N_0}{4RC} e^{-\frac{1}{RC}|\tau|}$$

Finalmente, a potência média de $y(t)$ é dada por

$$P_y = E[y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = R_y(0) = \frac{N_0}{4RC}$$

H. Processos estocásticos Gaussianos

- Definição 20: Processo estocástico Gaussiano

Seja $x(t)$ um processo estocástico com parâmetro definido em $[T_1, T_2]$, ou seja, $\Upsilon = [T_1, T_2]$. Este processo é Gaussiano se, para qualquer função $g(t)$, em que $g(t)$ é tal que $[y^2] < \infty$, o funcional linear

$$y = \int_{T_1}^{T_2} g(t)x(t)dt$$

é uma v.a. Gaussiana.

Propriedades

i) A resposta de um sistema linear a um processo estocástico Gaussiano $x(t)$ definido em $[T_1, T_2]$ é também um processo estocástico Gaussiano

$$y = \int_{T_1}^{T_2} g(t)x(t)dt$$

ii) Seja $x(t)$ um processo estocástico com parâmetro definido em $[T_1, T_2]$. Qualquer conjunto de n v.a.s definidas sobre o processo formam um vetor Gaussiano

$$y = \int_{T_1}^{T_2} g(t)x(t)dt = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{t_i} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}$$

iii) Se um processo estocástico Gaussiano é estacionário no sentido amplo então ele é estritamente estacionário

$$p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) = p_{\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{X}')$$

Exemplo 7

Seja $x(t)$ um processo estocástico Gaussiano com média e função autocorrelação dadas por

$$m_x(t) = 1 \quad \text{e} \quad R_x(\tau) = 2^{-|t_1 - t_2|} + 1 = 2^{-|\tau|} + 1$$

Determine a probabilidade $P(1 < x_4 < 3)$ de uma função amostra deste processo.

Solução:

Como x_4 é uma v.a. Gaussiana com média e variância dadas por

$$m_{x_4} = E[x_4] = 1$$
$$\sigma_{x_4}^2 = E[{x_4}^2] - m_{x_4}^2 = R_x(0) - m_{x_4}^2 = 1$$

Tem-se então

$$P(1 < x_4 < 3) = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_4-1)^2}{2}} \mathrm{d}X_4 = \frac{1}{2} - Q(2) = 0{,}4772$$

Exemplo 8

Seja $x(t)$ um processo estocástico Gaussiano com média e função autocorrelação dadas por

$$m_x(t) = \frac{1}{2} \ \text{e} \ R_x(\tau) = 2\delta(\tau) + \frac{1}{4}$$

Este processo estocástico passa através de um sistema linear cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

Determine a expressão da fdp de 2ª ordem de $y(t)$

Solução:

A fdp de 2ª ordem de $y(t)$ é dada por

$$p_{y_{t_1}y_{t_2}}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \boldsymbol{K}_y}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{m}_y)^T \boldsymbol{K}_y^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{m}_y)}$$

Como $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \end{bmatrix}$ é Gaussiano com vetor média $\boldsymbol{m}_y = \begin{bmatrix} m_y(t_1) \\ m_y(t_2) \end{bmatrix}$ e matriz covariância $\boldsymbol{K}_y = \begin{bmatrix} K_y(t_1, t_1) & K_y(t_1, t_2) \\ K_y(t_2, t_1) & K_y(t_2, t_2) \end{bmatrix}$.

A função densidade espectral de potência de $x(t)$ é dada por

$$S_x(f) = \Im\{R_x(\tau)\} = \Im\left\{2\delta(\tau) + \frac{1}{4}\right\} = 2 + \frac{1}{4}\delta(f)$$

A função densidade espectral de potência de $y(t)$ é dada por

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}\frac{1}{1 - j2\pi f}\left(2 + \frac{1}{4}\delta(f)\right) = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} + \frac{1}{4}\delta(f)$$

Consequentemente, a função autocorrelação é dada por

$$R_y(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{S_y(f)\} = e^{-|\tau|} + \frac{1}{4}$$

Como a média é dada por $m_y(t) = m_x(t)H(0) = \frac{1}{2}$, obtém-se

$$K_y(\tau) = R_y(\tau) - m_y^2(t) = e^{-|\tau|} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = e^{-|\tau|}, \qquad \tau = t_1 - t_2$$

Logo, tem-se

$p_{y_{t_1}y_{t_2}}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \boldsymbol{K}_y}} e^{-\frac{1}{2}\left(Y_1 - \frac{1}{2}\;Y_2 - \frac{1}{2}\right)^T \boldsymbol{K}_y^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 - \frac{1}{2} \\ Y_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$, em que $\boldsymbol{K}_y = \begin{bmatrix} 1 & e^{-|\tau|} \\ e^{-|\tau|} & 1 \end{bmatrix}$