Modelos Probabilísticos em Engenharia Elétrica

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br

Prova 2 de 2019.2

Questão 1: (2,5 pontos)

Considere x uma variável aleatória Gaussiana com média m e variância σ^2 e a função $y = e^x$.

a) Determine a função densidade de probabilidade de y. (0,75 ponto)

b) Calcule o valor médio de y. (0,75 ponto)

c) Calcule o valor médio quadrático e a variância de y. (1,0 ponto)

Solução:

a) Usando-se $y = g(x) = e^x$ tem-se

$$x = g^{-1}(y) = h(y) = \ln y$$

$$p_y(Y) = \left.\frac{p_x(X)}{|h'(y)|}\right|_{X = \ln Y} = \frac{1}{Y\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln Y - m)^2}{2\sigma^2}}$$

b) Usando-se a mudança de variável $\mathrm{U} = X - m$ obtém-se

$$E[y] = E[e^x] = \int_{-\infty}^{\infty} e^X \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}}\, dX = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

c) $E[y^2] = E[e^{2x}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}}\, dX = e^{2m+2\sigma^2}$

Questão 2: (2,5 pontos)

Considere um sinal dado por $s(t) = x\cos(wt) + y\,\text{sen}(wt)$, em que w é uma frequência angular constante, e x e y que são variáveis aleatórias Gaussianas estatisticamente independentes com média zero e variância σ^2.

a) Mostre que s(t) pode ser escrito como $s(t) = a\cos(wt - \theta)$, e determine a e θ. (0,75 ponto)

b) Encontre a função densidade de probabilidade conjunta de a e θ. (1,0 ponto)

c) Determine se a e θ são variáveis aleatórias estatisticamente independentes. (0,75 ponto)

Solução:

a) $\mathrm{s(t)} = xcos(wt) + ysen(wt) = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(wt) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} sen(wt)\right) =$

$\sqrt{x^2+y^2}\big(\cos(\theta)\cos(wt) + sen(\theta)sen(wt)\big) = \mathrm{a}\cos(wt-\theta)$

em que $\mathrm{a} = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

b) O Jacobiano é dado por $J = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -Asen(\theta) \\ sen(\theta) & Acos(\theta) \end{vmatrix} = A$

A fdp conjunta é dada por

$$p_{a\theta}(A,\Theta) = \frac{p_{xy}(X,Y)}{|J|}\Bigg|_{X=Acos(\theta),\,Y=Aseno(\theta)} = \frac{\mathrm{A}}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}$$

c) Como $p_{a\theta}(A,\Theta) = \frac{\mathrm{A}}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} = p_a(A)p_\theta(\Theta) = \frac{\mathrm{A}}{\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}.\frac{1}{2\pi}$ as v.a.s são est. ind.

Questão 3: (2,5 pontos)

Seja x uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $p_x(X)$ e $y = ax + b$, em que a (a>0) e b são constantes.

a) Encontre a função densidade de probabilidade de y, $p_y(Y)$, em termos de $p_x(X)$. (0,75 ponto)

b) Mostre que E[y] = a E[x] + b e calcule E[y] para uma variável aleatória x com distribuição uniforme entre c e d (d>c), em que c e d são constantes. (1,0 ponto)

c) Mostre que a variância de y, $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$. (0,75 ponto)

Solução:

a) $y = g(x) = ax = b$

$x = g^{-1}(y) = h(y) = \frac{y-b}{a}$ e $g'(x) = a, \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$

$$p_y(Y) = \frac{p_x(X)}{|g'(y)|}\Bigg|_{X = \frac{Y-b}{a}} = \frac{1}{a} p_x\left(\frac{Y-b}{a}\right)$$

b) $E[y] = E[ax + b] = aE[x] + b$ (usar a abordagem por integrais)

$E[y] = aE[x] + b = \frac{a}{2}(d + c) + b$ (integral seguida de manipulação algébrica)

c) $\sigma_y^2 = E\left[(y - m_y)^2\right] = a^2\sigma_x^2$ (manipulação algébrica)

PUC RIO

Questão 4: (2,5 pontos)

Considere $x_1, x_2, \cdots, x_n$ variáveis aleatórias Gaussianas estatisticamente independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância unitária e a soma $y = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$

a) Calcule a função característica de y. (0,75 ponto)

b) Determine a média e a variância de y. Explique os resultados obtidos. (1,0 ponto)

c) O tempo de vida de um dispositivo eletrônico é uma variável aleatória do tipo $y = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$ com média de 50 horas e desvio padrão de 20 horas. Supondo-se um estoque de 20 dispositivos com tempos de vida independentes, calcule uma aproximação para a probabilidade do uso acumulado de 20 dispositivos exceder 1200 horas de uso. (0,75 ponto)

Solução:

a) $M_y(v) = E\left[e^{jvy}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{jvx_i^2}\right] = \prod_{i=1}^{n}(1-2v)^{-\frac{1}{2}} = (1-2v)^{-\frac{n}{2}}$

b)

$$m_y = E[y] = n$$
$$\lambda_y = E[y^2] = n(n+2)$$
$$\sigma_y^2 = \lambda_y - m_y^2 = 2n$$

c) $P\left(\frac{y-n.m}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1200-1000}{20\sqrt{20}}\right) = Q\left(\frac{10}{\sqrt{20}}\right) = 1{,}27\%$